ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

東京大学
文系数学

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

1

a を正の実数とする。座標平面において、放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a, a^2)$ における C の接線と直交し、P を通る直線を ℓ とおく。ℓ と C の交点のうち、P と異なる点を Q とおく。

(1) Q の x 座標を求めよ。

Q における C の接線と直交し、Q を通る直線を m とおく。m と C の交点のうち、Q と異なる点を R とおく。

(2) a がすべての正の実数を動くとき、R の x 座標の最小値を求めよ。

2

平面上で $\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = 1$ である二等辺三角形 ABC を考える。正の実数 r に対し、A, B, C それぞれを中心とする半径 r の円 3 つを合わせた領域を D_r とする。ただし、この問いでは、三角形と円は周とその内部からなるものとする。辺 AB, AC, BC がすべて D_r に含まれるような最小の r を s、三角形 ABC が D_r に含まれるような最小の r を t と表す。

(1) $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ のとき、s と t を求めよ。

(2) $\angle\mathrm{BAC} = \dfrac{2\pi}{3}$ のとき、s と t を求めよ。

(3) $0 < \theta < \pi$ を満たす θ に対して、$\angle\mathrm{BAC} = \theta$ のとき、s と t を θ を用いて表せ。

3

白玉 2 個が横に並んでいる。投げたとき表と裏のでる確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを用いて、次の手順 $(*)$ をくり返し、白玉または黒玉を横一列に並べていく。

手順 $(*)$ コインを投げ、表がでたら白玉、裏がでたら黒玉を、それまでに並べられている一番右にある玉の右隣におく。そして、新しくおいた玉の色がその 1 つ左の玉の色と異なり、かつ 2 つ左の玉の色と一致するときには、新しくおいた玉の 1 つ左の玉を新しくおいた玉と同じ色の玉にとりかえる。

例えば、手順 $(*)$ を 2 回行いコインが裏、表の順にでた場合には、白玉が 4 つ並ぶ。
正の整数 n に対して、手順 $(*)$ を n 回行った時点での $(n+2)$ 個の玉の並び方を考える。

(1) $n = 3$ のとき、右から 2 番目の玉が白玉である確率を求めよ。

(2) n を正の整数とする。右から 2 番目の玉が白玉である確率を求めよ。

(3) n を正の整数とする。右から 1 番目と 2 番目の玉がともに白玉である確率を求めよ。

4

a を実数とする。座標平面において、次の連立不等式の表す領域の面積を $S(a)$ とする。

$$\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2 + 2, \\ y \geqq |x^2 + a|, \\ -1 \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

a が $-2 \leqq a < 2$ の範囲を動くとき、$S(a)$ の最大値を求めよ。

1

a を正の実数とする。座標平面において、放物線 $C : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a, a^2)$ における C の接線と直交し、P を通る直線を ℓ とおく。ℓ と C の交点のうち、P と異なる点を Q とおく。

(1) Q の x 座標を求めよ。

Q における C の接線と直交し、Q を通る直線を m とおく。m と C の交点のうち、Q と異なる点を R とおく。

(2) a がすべての正の実数を動くとき、R の x 座標の最小値を求めよ。

(1)

法線の方程式は $y'=2a$ より

$y=-\frac{1}{2a}x+a^2+\frac{1}{2}$

これと、$y=x^2$ を連立して、$x^2+\frac{1}{2a}x-a^2-\frac{1}{2}=0$

$(x-a)(x+\frac{1}{2a}+a)=0$

よって $x=-\frac{1}{2a}-a$ //

(2) (1)と同様にして、

Rのx座標は $\frac{1}{2(\frac{1}{2a}+a)}+(\frac{1}{2a}+a)$ となり、

$\frac{1}{2a}+a=t$ とおくと 相加相乗平均の関係より $t\geqq\sqrt{2}$ (等号成立は $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$)

よって 求めるものは

$t\geqq\sqrt{2}$ の時の $f(t)=\frac{1}{2t}+t$ の最小値。

$\frac{1}{2t}+t=k$ となる $t\geqq\sqrt{2}$ が存在すると考えると、

$2t^2-2tk+1=0$ が $t\geqq\sqrt{2}$ に解をもつことになる。

この条件は

$$\begin{cases} f(\sqrt{2})\geqq 0 \\ D\geqq 0 \\ \frac{t}{2}\geqq\sqrt{2} \end{cases} \text{ または } \begin{cases} f(\sqrt{2})\leqq 0 \\ D\geqq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t\leqq\frac{5\sqrt{2}}{4} \\ (-2t)^2-8\geqq 0 \\ t\geqq 2\sqrt{2} \end{cases} \text{ または } \begin{cases} t\geqq\frac{5\sqrt{2}}{4} \\ (-2t)^2-8\geqq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow t\geqq\frac{5\sqrt{2}}{4}$

$\min=\frac{5\sqrt{2}}{4}$ //

2

平面上で AB = AC = 1 である二等辺三角形 ABC を考える。正の実数 r に対し、A, B, C それぞれを中心とする半径 r の円 3 つを合わせた領域を D_r とする。ただし、この問いでは、三角形と円は周とその内部からなるものとする。辺 AB, AC, BC がすべて D_r に含まれるような最小の r を s、三角形 ABC が D_r に含まれるような最小の r を t と表す。

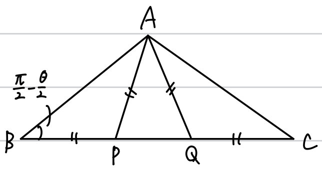
(1) $\angle BAC = \frac{\pi}{3}$ のとき、s と t を求めよ。

(2) $\angle BAC = \frac{2\pi}{3}$ のとき、s と t を求めよ。

(3) $0 < \theta < \pi$ を満たす θ に対して、$\angle BAC = \theta$ のとき、s と t を θ を用いて表せ。

実際は、(1), (2) を解く過程で場合分けに気づく
△ABCの形によって変わるので θ で場合分けする!

(i) $\frac{\pi}{2} \leqq \theta < \pi$ のとき



辺BC上に PA=PB　QA=QC をみたす P, Q をとる。

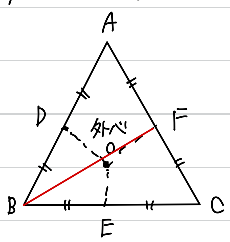
$AP = \dfrac{\frac{1}{2}}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$
$= \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ となる。

$r = \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ のとき、題意をみたす。

$r < \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$ の場合 $BQ > r$ となり、Qが D_r に含まれない。

よって、$s = t = \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}}$

(ii) $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき



△ABCの外接円の半径は

$2R = \dfrac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$ より $R = \dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$

$r = R$ のとき題意をみたすが、
$r < R$ のとき、$OA = OB = OC > r$ となり不適。

$\therefore\ t = \dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}}$

次に s を求める。

① $0 < \theta \leqq \frac{\pi}{3}$ のとき、

$r = \frac{1}{2}$ のとき $2r = 1 \geqq BC$ より題意をみたす。

$r < \frac{1}{2}$ のとき 余弦定理より $BF^2 = \frac{5}{4} - \cos\theta$
$\geqq \frac{1}{4}$

より、$BF \geqq \frac{1}{2}$ となり、不適。　よって $s = \frac{1}{2}$

② $\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ のとき、

$r = \sin\frac{\theta}{2}$ とすると、$2r = BC \geqq AB = AC$ より、題意をみたす。

しかし、$r < \sin\frac{\theta}{2}$ のとき、$BF = \cos\frac{\theta}{2} \geqq \sin\frac{\theta}{2}$ となり不適。　よって $s = \sin\frac{\theta}{2}$

求める答えは、

$$\begin{cases} s = \frac{1}{2} & \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}\right) \\ s = \sin\frac{\theta}{2} & \left(\frac{\pi}{3} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right) \\ s = \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} & \left(\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \dfrac{1}{2\cos\frac{\theta}{2}} & \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right) \\ t = \dfrac{1}{2\sin\frac{\theta}{2}} & \left(\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi\right) \end{cases}$$

(1) $s = \frac{1}{2}$　$t = \frac{1}{\sqrt{3}}$　　(2) $s = \frac{1}{\sqrt{3}}$　$t = 1$

3

白玉 2 個が横に並んでいる。投げたとき表と裏のでる確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインを用いて、次の手順 $(*)$ をくり返し、白玉または黒玉を横一列に並べていく。

手順 $(*)$ コインを投げ、表がでたら白玉、裏がでたら黒玉を、それまでに並べられている一番右にある玉の右隣におく。そして、新しくおいた玉の色がその 1 つ左の玉の色と異なり、かつ 2 つ左の玉の色と一致するときには、新しくおいた玉の 1 つ左の玉を新しくおいた玉と同じ色の玉にとりかえる。

例えば、手順 $(*)$ を 2 回行いコインが裏、表の順にでた場合には、白玉が 4 つ並ぶ。
正の整数 n に対して、手順 $(*)$ を n 回行った時点での $(n+2)$ 個の玉の並び方を考える。

(1) $n=3$ のとき、右から 2 番目の玉が白玉である確率を求めよ。

(2) n を正の整数とする。右から 2 番目の玉が白玉である確率を求めよ。

(3) n を正の整数とする。右から 1 番目と 2 番目の玉がともに白玉である確率を求めよ。

(2) から解く。

右端 2つの玉の色で分けて、漸化式をたてる。

○○ .. a_n
○● .. b_n
●○ .. c_n
●● .. d_n
とする。

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+b_n+c_n) \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}d_n \\ d_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n+c_n+d_n) \end{cases}$$

$a_{n+1}+d_{n+1} = 1-\frac{1}{2}(b_n+c_n)$

$a_{n+1}-d_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n-d_n)$

$b_{n+1}+c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n+d_n)$

$b_{n+1}-c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n-d_n)$

これを解いて、初期条件より

$a_n-d_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad b_n-c_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$

$a_{n+1}+d_{n+1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(a_{n-1}+d_{n-1})$

よって

$$\begin{cases} n\text{奇数}: a_n+d_n=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3} \\ n\text{偶数}: a_n+d_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3} \end{cases}$$

$a_n-d_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ なので

$$\begin{cases} n\text{奇数}: p_n=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3} \\ n\text{偶数}: p_n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3} \end{cases} \cdots ① \quad \begin{cases} n\text{奇数}: q_n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{6} \\ n\text{偶数}: q_n=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{6} \end{cases} \cdots ②$$

よって

(2) は $a_n+b_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}$ $\quad\therefore$ (1) $\frac{5}{8}$

(3) $\begin{cases} n\text{奇数} \ \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3} \\ n\text{偶数} \ \frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{3} \end{cases}$

$\boxed{4}$

a を実数とする。座標平面において、次の連立不等式の表す領域の面積を $S(a)$ とする。

$$\begin{cases} y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2 + 2, \\ y \geqq |x^2 + a|, \\ -1 \leqq x \leqq 1. \end{cases}$$

a が $-2 \leqq a < 2$ の範囲を動くとき、$S(a)$ の最大値を求めよ。

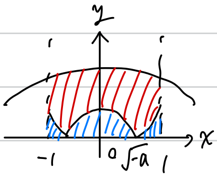
$y=|x^2+a|$ の $-1 \leqq x \leqq 1$ における形で場合分けするイメージ。

(i) $0 \leqq a < 2$ のとき

$|x^2+a| = x^2+a$ なので、

$S(a) \leqq S(0)$

(ii) $-1 \leqq a \leqq 0$ のとき



求める面積は、

$$S(a) = 2\int_0^1\left(-\frac{1}{2}x^2+2\right)dx - 2\int_{\sqrt{-a}}^1 (x^2+a)dx + 2\int_0^{\sqrt{-a}} (x^2+a)dx$$

$$= 2\left[-\frac{x^3}{6}+2x\right]_0^1 - 2\left[\frac{x^3}{3}+ax\right]_{\sqrt{-a}}^1 + 2\left[\frac{x^3}{3}+ax\right]_0^{\sqrt{-a}}$$

$$= -\frac{8}{3}(\sqrt{-a})^3 + 2(\sqrt{-a})^2 + 3$$

$\sqrt{-a} = t$ とおくと、$f(t) = -\frac{8}{3}t^3 + 2t^2 + 3$

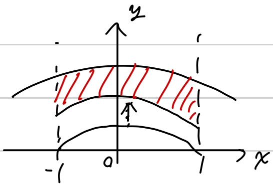
$$f'(t) = -8t^2 + 4t$$

$$= -4(2t-1)$$

よって $f(t)$ の最大値は $t=\frac{1}{2}$ のとき $\frac{19}{6}$ 　このとき $a=-\frac{1}{4}$ でOK。

(iii) $-2 \leqq a \leqq 1$ のとき、　図より

$S(a) \leqq S(-1)$



よって $\frac{19}{6}$ //