1

座標平面上の点 A(0, 0), B(0, 1), C(1, 1), D(1, 0) を考える。実数 $0 < t < 1$ に対して、線分 AB, BC, CD を $t : (1-t)$ に内分する点をそれぞれ $\mathrm{P}_t, \mathrm{Q}_t, \mathrm{R}_t$ とし、線分 $\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t, \mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$ を $t : (1-t)$ に内分する点をそれぞれ $\mathrm{S}_t, \mathrm{T}_t$ とする。さらに、線分 $\mathrm{S}_t\mathrm{T}_t$ を $t : (1-t)$ に内分する点を U_t とする。また、点 A を U_0, 点 D を U_1 とする。

(1) 点 U_t の座標を求めよ。

(2) t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線と、線分 AD で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) a を $0 < a < 1$ を満たす実数とする。t が $0 \leqq t \leqq a$ の範囲を動くときに点 U_t が描く曲線の長さを、a の多項式の形で求めよ。

2

(1) $x > 0$ のとき、不等式

$$\log x \leqq x - 1$$

を示せ。

(2) 次の極限を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^2 \log\left(1 + \frac{x^n}{2}\right) dx$$

3

平行四辺形 ABCD において、$\angle\mathrm{ABC} = \dfrac{\pi}{6}$, $\mathrm{AB} = a$, $\mathrm{BC} = b$, $a \leqq b$ とする。次の条件を満たす長方形 EFGH を考え、その面積を S とする。

条件: 点 A, B, C, D はそれぞれ辺 EF, FG, GH, HE 上にある。ただし、辺はその両端の点も含むものとする。

(1) $\angle\mathrm{BCG} = \theta$ とするとき、S を a, b, θ を用いて表せ。

(2) S のとりうる値の最大値を a, b を用いて表せ。

4

この問いでは、0 以上の整数の 2 乗になる数を平方数と呼ぶ。a を正の整数とし、

$$f_a(x) = x^2 + x - a$$

とおく。

(1) n を正の整数とする。$f_a(n)$ が平方数ならば、$n \leqq a$ であることを示せ。

(2) $f_a(n)$ が平方数となる正の整数 n の個数を N_a とおく。次の条件 (i), (ii) が同値であることを示せ。

(i) $N_a = 1$ である。

(ii) $4a + 1$ は素数である。

5

n を 2 以上の整数とする。1 から n までの数字が書かれた札が各 1 枚ずつ合計 n 枚あり、横一列におかれている。1 以上 $(n-1)$ 以下の整数 i に対して、次の操作 (T_i) を考える。

(T_i) 左から i 番目の札の数字が、左から $(i+1)$ 番目の札の数字よりも大きければ、これら 2 枚の札の位置を入れかえる。そうでなければ、札の位置をかえない。

最初の状態において札の数字は左から $A_1, A_2, \ldots, A_n$ であったとする。この状態から $(n-1)$ 回の操作 $(T_1), (T_2), \ldots, (T_{n-1})$ を順に行った後、続けて $(n-1)$ 回の操作 $(T_{n-1}), \ldots, (T_2), (T_1)$ を順に行ったところ、札の数字は左から $1, 2, \ldots, n$ と小さい順に並んだ。以下の問いに答えよ。

(1) A_1 と A_2 のうち少なくともどちらか一方は 2 以下であることを示せ。

(2) 最初の状態としてありうる札の数字の並び方 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の総数を c_n とする。n が 4 以上の整数であるとき、c_n を c_{n-1} と c_{n-2} を用いて表せ。

6

複素数平面上の点 $\dfrac{1}{2}$ を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円の周から原点を除いた曲線を C とする。

(1) 曲線 C 上の複素数 z に対し、$\dfrac{1}{z}$ の実部は 1 であることを示せ。

(2) α, β を曲線 C 上の相異なる複素数とするとき、$\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{1}{\beta^2}$ がとりうる範囲を複素数平面上に図示せよ。

(3) γ を (2) で求めた範囲に属さない複素数とするとき、$\dfrac{1}{\gamma}$ の実部がとりうる値の最大値と最小値を求めよ。

公式LINE
ゴウカライズ HP
オンライン学習マネジメントならゴウカライズ・医学部受験ならゴウカライズメディカル・獣医学部受験ならゴウカライズ VET
公式 LINE (こちら) で無料相談受付中！
公式 𝕏 (@goukalize) では解答速報公開中！