ゴウカライズ

数学

2025

大学入試　解答速報

一橋大学

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

1

正の整数 n に対し，n の正の約数の個数を $d(n)$ とする．たとえば，6 の正の約数は $1, 2, 3, 6$ の 4 個なので，$d(6) = 4$ である．また，

$$f(n) = \frac{d(n)}{\sqrt{n}}$$

とする．

(1) $f(2025)$ を求めよ．

(2) 素数 p と正の整数 k の組で $f(p^k) \leqq f(p^{k+1})$ を満たすものを求めよ．

(3) $f(n)$ の最大値と，そのときの n を求めよ．

2

座標平面上に原点を中心とする半径 3 の円 C_1 がある．また，直線 $x = 2$ 上の点 P を中心とする半径 1 の円を C_2 とする．

(1) C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つような点 P の y 座標の範囲を求めよ．

(2) C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つとき，その 2 つの共有点を通る直線を ℓ とする．ℓ に関して P と対称な位置にある点を Q とする．ただし，P が ℓ 上にあるときは Q = P とする．P の y 座標が (1) で求めた範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求め，図示せよ．

3

等式

$$6\int_0^2 |x^2 - a|\, dx = a^2 - 2a + k$$

が成り立つ実数 a がちょうど 4 つ存在するような実数 k の範囲を求めよ．

4

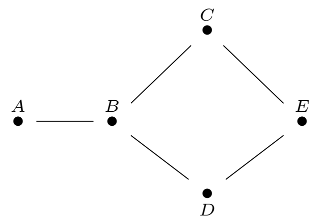
原点を O とする座標空間内の 2 点 $\mathrm{A}(0, 3, -5)$, $\mathrm{B}(5, -2, 10)$ に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\left\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}, \quad s \geqq 0, \quad \frac{1}{5} \leqq t \leqq \frac{3}{5}$$

で定まる点 P が存在する範囲を D とする．D に含まれる半径 $10\sqrt{2}$ の円のうち，その中心と原点との距離が最小となるものを C とする．円 C の中心の座標を求めよ．

5

5 点 A, B, C, D, E が下図のように線分でむすばれている．点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots$ を次のように定めていく．P_1 を A とする．正の整数 n に対して，P_n を端点とする線分をひとつ無作為にえらび，その線分の P_n とは異なる端点を P_{n+1} とする．



(1) P_n が A または B である確率 p_n を求めよ．

(2) P_n が A または B であるとき，$k = 1, 2, \ldots, n$ のいずれに対しても $\mathrm{P}_k = \mathrm{E}$ とはならない条件付き確率 q_n を求めよ．

$\boxed{1}$

正の整数 n に対し，n の正の約数の個数を $d(n)$ とする．たとえば，6 の正の約数は $1, 2, 3, 6$ の 4 個なので，$d(6) = 4$ である．また，

$$f(n) = \frac{d(n)}{\sqrt{n}}$$

とする．

(1) $f(2025)$ を求めよ．

(2) 素数 p と正の整数 k の組で $f(p^k) \leqq f(p^{k+1})$ を満たすものを求めよ．

(3) $f(n)$ の最大値と，そのときの n を求めよ．

$\boxed{1}$

(1) $2025 = 3^4 \times 5^2$ →) $d(2025) = (4+1)\times(2+1) = 15$, また $\sqrt{2025} = 45$ より、

$$f(2025) = \frac{d(2025)}{\sqrt{2025}} = \frac{15}{45} = \underline{\frac{1}{3}}$$

(2) $d(p^k) = k+1$, $d(p^{k+1}) = k+2$ より

$$f(p^k) \leqq f(p^{k+1})$$

$$\therefore \frac{k+1}{\sqrt{p^k}} \leqq \frac{k+2}{\sqrt{p^{k+1}}} \quad \therefore \frac{k+1}{k+2} \leqq \frac{1}{\sqrt{p}} \quad \therefore \sqrt{p} \leqq \frac{k+2}{k+1} = 1 + \frac{1}{k+1} \leqq 1 + \frac{1}{1+1} = \frac{3}{2}$$

よって $p \leqq \frac{9}{4}$ より、$p = 2$ が必要

$p = 2$ のとき

$\sqrt{2} \leqq 1 + \frac{1}{k+1}$ $\therefore \sqrt{2} - 1 \leqq \frac{1}{k+1}$ $\therefore k+1 \leqq \sqrt{2}+1$ $\therefore k \leqq \sqrt{2}$ より $k = 1$ のみ. よって $(p, k) = \underline{(2, 1)}$

(3) n を素因数分解したときに、2, 3 以外の素数が存在するとき、

$n = 2^\alpha \times 3^\beta \times p_1^{q_1} \times p_2^{q_2} \cdots$ とできる. ($q_1, q_2 \cdots \in \mathbb{N}$、$5 \leqq p_1 < p_2 < \cdots$ (p_r は素数))

このとき

$d(n) = (\alpha+1)(\beta+1)(q_1+1)(q_2+1)\cdots$ より、

$$f(n) = \frac{(\alpha+1)(\beta+1) \times (q_1+1)(q_2+1)\cdots}{\sqrt{2^\alpha \cdot 3^\beta} \times \sqrt{p_1^{q_1} \times p_2^{q_2} \times \cdots}}$$

A とする.

ここで $A = \dfrac{(q_1+1)(q_2+1)\cdots}{\sqrt{p_1^{q_1} \times p_2^{q_2} \times \cdots}} = \dfrac{q_1+1}{\sqrt{p_1^{q_1}}} \times \dfrac{q_2+1}{\sqrt{p_2^{q_2}}} \times \cdots$

一般に $x \geqq 5$ なる x，$y \geqq 1$ なる y，($y, x \in \mathbb{N}$) については.

$$\left(\frac{y+1}{\sqrt{x^y}}\right)^2 = \frac{y^2+2y+1}{x^y} < \frac{y^2+2y+1}{5^y} \quad — (*)$$

$5^y > y^2+2y+1$ は簡単な帰納法よりわかるので、

$$\frac{y^2+2y+1}{5^y} < 1 \quad \therefore \frac{y+1}{\sqrt{x^y}} < 1 \text{ より.}$$

$$A < 1 \times 1 \times 1 \times \cdots = 1 \text{ より}$$

$$f(n) < \frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{\sqrt{2^\alpha \cdot 3^\beta}} = f(2^\alpha \cdot 3^\beta) \text{ より、}$$

5 より大きい素因数はないときが Max となる.

よって

$n = 2^\alpha \cdot 3^\beta$ としたとき

$f(n) = \dfrac{\alpha+1}{\sqrt{2^\alpha}} \cdot \dfrac{\beta+1}{\sqrt{3^\beta}}$ の Max は (2) より $\alpha = 2$、$\beta = 1$ より $n = 12$ のときで $f(12) = \dfrac{3 \times 2}{\sqrt{12}} = \underline{\sqrt{3}}$ が Max.

$\boxed{2}$

座標平面上に原点を中心とする半径 3 の円 C_1 がある．また，直線 $x=2$ 上の点 P を中心とする半径 1 の円を C_2 とする．

(1) C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つような点 P の y 座標の範囲を求めよ．

(2) C_1 と C_2 が共有点を 2 つ持つとき，その 2 つの共有点を通る直線を ℓ とする．ℓ に関して P と対称な位置にある点を Q とする．ただし，P が ℓ 上にあるときは Q＝P とする．P の y 座標が (1) で求めた範囲を動くとき，点 Q の軌跡を求め，図示せよ．

(1)

2つの円が交わるための中心間距離と半径の関係は、

$|R_1-R_2|<$ OPの長さ $<R_1+R_2$ （R_1. R_2 はそれぞれの半径）

ここで、$R_1=3$　$R_2=1$　P $(2.\ a)$ とすると、

$2<\sqrt{a^2+4}<4$

$0<a^2<12$ より、 $\underline{-2\sqrt{3}<a<0 \quad 0<a<2\sqrt{3}}$ //

(2)

$C_1: x^2+y^2=9$

$C_2: (x-2)^2+(y-a)^2=1$

とすると、

C_1. C_2 の交点を通る直線の方程式は

$(x^2+y^2-9)-\{(x-2)^2+(y-a)^2-1\}=0$ を計算して、$4x+2ay-(a^2+12)=0$ となる。（束の考え方）

この直線に関して、$(2.\ a)$ を反転した点 Q の座標は、$\left(\frac{16}{a^2+4},\ \frac{8a}{a^2+4}\right)$ と計算できる。

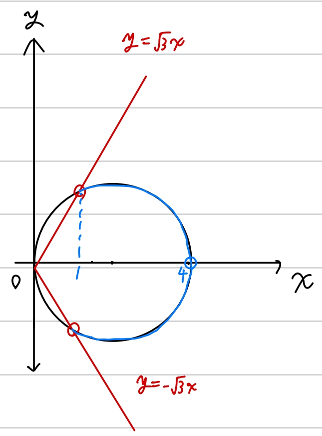
Q $(X.\ Y)$ として、Q の軌跡を求める。

$\frac{Y}{X}=\frac{a}{2}$ より、$a=\frac{2Y}{X}$ を代入して、$X=\frac{16}{\left(\frac{2Y}{X}\right)^2+4}=\frac{4X^2}{X^2+Y^2}$ となる。

このとき、$X^2+Y^2=4X$ より、$(X-2)^2+Y^2=4$

また、(1) より　$0<\left|\frac{Y}{X}\right|<\sqrt{3}$ なので、右図の青部分。

$(X-2)^2+y^2=4$
$\underline{1<x<4}$ //



3

等式

$$6\int_0^2 |x^2-a|\,dx = a^2-2a+k$$

が成り立つ実数 a がちょうど 4 つ存在するような実数 k の範囲を求めよ.

絶対値付き積分は区間分割！

(i) $a \leqq 0$ のとき

$$6\int_0^2 (x^2-a)\,dx = 6\left[\frac{x^3}{3}-ax\right]_0^2$$

$$= 16-12a$$

(ii) $0 < a \leqq 4$ のとき

$$6\int_0^2 |x^2-a|\,dx = 6\int_0^{\sqrt{a}} (a-x^2)\,dx + 6\int_{\sqrt{a}}^2 (x^2-a)\,dx$$

$$= 6\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\sqrt{a}} + 6\left[\frac{x^3}{3}-ax\right]_{\sqrt{a}}^2$$

$$= 8a\sqrt{a}-12a+16$$

(iii) $a > 4$ のとき

$$6\int_0^2 |x^2-a|\,dx = 6\int_0^2 (a-x^2)\,dx$$

$$= 6\left[ax-\frac{x^3}{3}\right]_0^2$$

$$= 12a-16$$

問題の式に代入すると,

$$\begin{cases} k = -a^2-10a+16 & (a \leqq 0) \\ k = -a^2+8a\sqrt{a}-10a+16 & (0 < a \leqq 4) \\ k = -a^2+14a-16 & (a > 4) \end{cases}$$

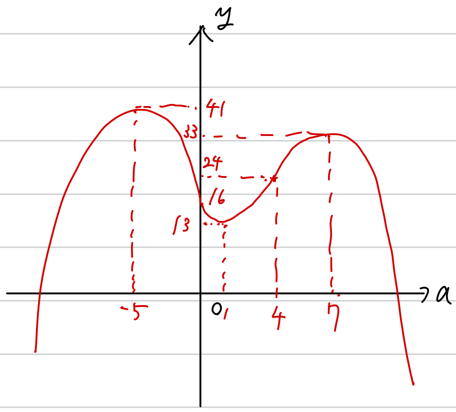
右辺を $f(a)$ とすると,

$0 < a \leqq 4$ のとき $f'(a) = -2a+12\sqrt{a}-10$

$$= -2(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}-5)$$

より, $f(a)$ は $0 < a < 1$ で減少、$1 < a < 4$ で増加する。

$y = f(a)$ のグラフは下のようになる。



求める答えは, $\underline{13 < k < 33}$

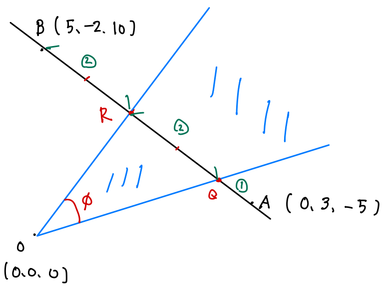
$\boxed{4}$

原点を O とする座標空間内の 2 点 A(0, 3, −5), B(5, −2, 10) に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\left\{(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\},\quad s \geqq 0,\quad \frac{1}{5} \leqq t \leqq \frac{3}{5}$$

で定まる点 P が存在する範囲を D とする．D に含まれる半径 $10\sqrt{2}$ の円のうち，その中心と原点との距離が最小となるものを C とする．円 C の中心の座標を求めよ．

$\boxed{4}$

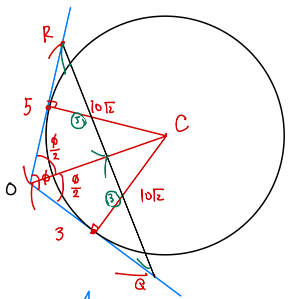


条件より、点 P の存在する範囲は左図のようになる。
ここで、図のように Q, R を定めると、

$$Q\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{4}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

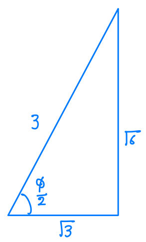
$$R\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{3}{5}\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

であり、$\cos\phi = \dfrac{\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OR}||\overrightarrow{OQ}|} = \dfrac{3+0+(-8)}{\sqrt{9}\times\sqrt{25}} = \dfrac{-5}{3\cdot 5} = -\dfrac{1}{3}$ である。$(0 \leqq \phi \leqq \pi)$



ここで、C と O とのきょりが最小となるとき、位置関係は左のようになる。
ここで OC は図より ∠O を 2等分する線上にあるので、
OQ = 5、OR = 3 より
$\overrightarrow{OC} = p\left(\frac{5}{8}\overrightarrow{OQ} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OR}\right)$ — (*) とできる。$(p \in \mathbb{R})$

また $\cos\phi = 2\cos^2\frac{\phi}{2} - 1 = -\frac{1}{3}$　∴ $\cos^2\frac{\phi}{2} = \frac{1}{3}$　∴ $\cos\frac{\phi}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
より、$OC = 10\sqrt{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{3}$



よって $|\overrightarrow{OC}| = p\left|\frac{5}{8}\overrightarrow{OQ} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OR}\right| = 10\sqrt{3}$

$$\frac{5}{8}\overrightarrow{OQ} + \frac{3}{8}\overrightarrow{OR} = \frac{5}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} + \frac{3}{8}\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$$

$50+25$
75

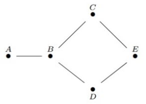
∴ $|\overrightarrow{OC}| = p \times \frac{1}{4} \times 5\sqrt{\cancel{3}} = 10\sqrt{\cancel{3}}$

∴ $p = 8$

よって $C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ \frac{5}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 \\ 10 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\boxed{5}$

5 点 A, B, C, D, E が下図のように線分でむすばれている．点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots$ を次のように定めていく．P_1 を A とする．正の整数 n に対して，P_n を端点とする線分をひとつ無作為にえらび，その線分の P_n とは異なる端点を P_{n+1} とする．



(1) P_n が A または B である確率 p_n を求めよ．

(2) P_n が A または B であるとき，$k=1,2,\ldots,n$ のいずれに対しても $\mathrm{P}_k=\mathrm{E}$ とはならない条件付き確率 q_n を求めよ．

(1)　帰納的に，$n \geqq 1$ において

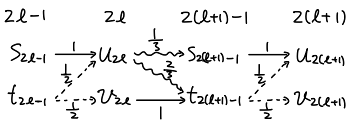
n が奇数のとき　$P_n = A$ または C または D

n が偶数のとき　$P_n = B$ または E

であり，点 C, D は対等であることから，P_n が A, C または D, B, E である確率をそれぞれ s_n, t_n, u_n, v_n とおくと，$l \geqq 1$ において

$$s_{2l-1}+t_{2l-1}=1, \quad u_{2l-1}=v_{2l-1}=0$$
$$u_{2l}+v_{2l}=1, \quad s_{2l}=t_{2l}=0$$

であり，推移のしかたは以下のよう．



よって，$l \geqq 1$ のとき

$$s_{2(l+1)-1}=\frac{1}{3}u_{2l}=\frac{1}{3}\left(s_{2l-1}+\frac{1}{2}t_{2l-1}\right)=\frac{1}{6}(s_{2l-1}+1)$$
$$(\because\ t_{2l-1}=1-s_{2l-1})$$

$$\therefore\quad s_{2(l+1)-1}-\frac{1}{5}=\frac{1}{6}\left(s_{2l-1}-\frac{1}{5}\right)$$
$$\therefore\quad s_{2l-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^{l-1}\left(s_1-\frac{1}{5}\right)+\frac{1}{5}$$
$$s_1=1 \text{ より}\quad s_{2l-1}=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{l-1}+\frac{1}{5}$$

$$u_{2(l+1)}=s_{2(l+1)-1}+\frac{1}{2}t_{2(l+1)-1}=\frac{1}{3}u_{2l}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}u_{2l}+v_{2l}\right)$$
$$=\frac{2}{3}u_{2l}+\frac{1}{2}v_{2l}=\frac{1}{6}u_{2l}+\frac{1}{2}$$
$$(\because\ v_{2l}=1-u_{2l})$$

$$\therefore\quad u_{2(l+1)}-\frac{3}{5}=\frac{1}{6}\left(u_{2l}-\frac{3}{5}\right)$$
$$\therefore\quad u_{2l}=\left(\frac{1}{6}\right)^{l-1}\left(u_2-\frac{3}{5}\right)$$
$$u_2=s_1+\frac{1}{2}t_1=1 \text{ より}\quad u_{2l}=\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{l-1}+\frac{3}{5}$$

以上より，

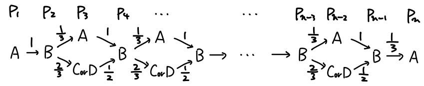
$$\left.\begin{array}{ll} n \text{ が奇数のとき} & p_n=s_n=\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}}+\dfrac{1}{5} \\ n \text{ が偶数のとき} & p_n=u_n=\dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}-1}+\dfrac{3}{5} \end{array}\right\}\text{(答)}$$

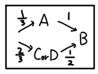
である．

(2)　<u>n が奇数のとき</u>

P_n が A であり，$P_2, P_4, \ldots, P_{n-1}$ が B である確率を α_n とおく．

(ア) $n \geqq 5$ のとき　推移のしかたは次のよう．



このように， を $\dfrac{(n-1)-2}{2}=\dfrac{n-3}{2}$ 回くり返すので，

$$\alpha_n=1\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-3}{2}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-3}{2}}$$

(イ) $n=1, 3$ のとき　$\alpha_1=1$，　$\alpha_3=1\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{3}$

（$n=3$ のときも $\alpha_n=\dfrac{1}{3}\cdot\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{n-3}{2}}$ は成り立つ）

以上より，

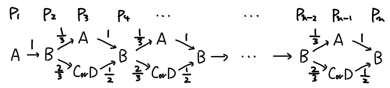
$$q_n=\frac{P_n \text{ が A であり，} P_2, P_4, \ldots, P_{n-1} \text{ が B である確率}}{P_n \text{ が A である確率}}=\frac{\alpha_n}{s_n}$$

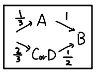
$$=\begin{cases} 1 & (n=1 \text{ のとき}) \\ \dfrac{\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-3}{2}}}{\frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n-1}{2}}+\frac{1}{5}} & (n \geqq 3 \text{ のとき}) \end{cases}\quad\cdots\text{(答)}$$

<u>n が偶数のとき</u>

P_n が B であり，$P_2, P_4, \ldots, P_{n-2}$ も B である確率を β_n とおく．

(ア) $n \geqq 4$ のとき　推移のしかたは次のよう．



このように， を $\dfrac{n-2}{2}$ 回くり返すので，

$$\beta_n=1\cdot\left(\frac{1}{3}\cdot1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-2}{2}}=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-2}{2}}$$

(イ) $n=2$ のとき　$\beta_2=1\cdot1=1$

以上より，

$$q_n=\frac{P_n \text{ が A であり，} P_2, P_4, \ldots, P_{n-2} \text{ も B である確率}}{P_n \text{ が A である確率}}=\frac{\beta_n}{u_n}$$

$$=\begin{cases} 1 & (n=2 \text{ のとき}) \\ \dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n-2}{2}}}{\frac{2}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{n}{2}-1}+\frac{3}{5}} & (n \geqq 4 \text{ のとき}) \end{cases}\quad\cdots\text{(答)}$$