ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

京都大学
文系数学

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

1

次の各問に答えよ.

問 1　x, y, z は実数で

$$2025^x = 3^y = 5^z$$

を満たすとする．このとき

$$2xy + 4xz - yz = 0$$

であることを示せ.

問 2　$n^4 + 6n^2 + 23$ が $n^2 + n + 3$ で割り切れるような正の整数 n をすべて求めよ.

2

実数 a, b についての次の条件 $(*)$ を考える。

$(*)$ ある実数係数の 2 次式 $f(x)$ と、ある実数 c に対して、x についての恒等式

$$\frac{1}{8}x^4 + ax^3 + bx^2 = f(f(x)) + c$$

が成り立つ。

この条件 $(*)$ を満たす点 (a, b) 全体の集合を座標平面上に図示せよ。

3

n は正の整数とする。1 枚の硬貨を投げ、表が出たら 1、裏が出たら 2 と記録する。この試行を n 回繰り返し、記録された順に数字を左から並べて n 桁の数 X を作る。ただし、数の表し方は十進法とする。このとき、X が 6 で割り切れる確率を求めよ。

4

座標平面において、曲線 $C_1 : y = x^2 - 2|x|$ と曲線 $C_2 : y = x^2 - 5x + \frac{7}{4}$ を考える。また、直線 $l_1 : x = \frac{3}{2}$ を考える。

(1) 点 $(0, 0)$ と異なる点で C_1 と接し、さらに C_2 とも接するような直線 l_2 がただ一つ存在することを示せ。

(2) C_1 と l_2 の共有点を P とし、その x 座標を a とする。また、l_1 と l_2 の共有点を Q とし、C_1 と l_1 の共有点を R とする。曲線 C_1 の $a \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ の部分、線分 PQ および線分 QR で囲まれる図形の面積を求めよ。

5

座標空間の 4 点 $\mathrm{O, A, B, C}$ は同一平面上にないとする。s, t, u は 0 でない実数とする。直線 OA 上の点 L、直線 OB 上の点 M、直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つようにとる。

s, t, u が $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき、3 点 $\mathrm{L, M, N}$ の定める平面 LMN は、s, t, u の値に無関係な一定の点を通ることを示せ。

$\boxed{1}$

次の各問に答えよ．

問 1　x, y, z は実数で

$$2025^x = 3^y = 5^z$$

を満たすとする．このとき

$$2xy + 4xz - yz = 0$$

であることを示せ．

問 2　$n^4 + 6n^2 + 23$ が $n^2 + n + 3$ で割り切れるような正の整数 n をすべて求めよ．

$2025 = 3^4 \cdot 5^2$ なので，

$2025^x = 3^{4x} \cdot 5^{2x}$

$3^{4x} \cdot 5^{2x} = 3^y = 5^z$ より，

$y = 4x + 2x\log_3 5$

$z = 2x + 4x\log_5 3$

$\log_3 5 = t$ とすると，

$y = 4x + 2tx$　$z = 2x + \frac{4x}{t}$

代入すると，

$2xy + 4xz - yz$

$= 2x(4x + 2tx) + 4x\left(2x + \frac{4x}{t}\right) - (4x + 2tx)\left(2x + \frac{4x}{t}\right)$

$= 0$

(2)　$n^4 + 6n^2 + 23 = (n^2 + n + 3)(n^2 - n + 4) - n + 11$ より，$n^2 + n + 3 > 0$ なので，

$11 - n$ が $n^2 + n + 3$ で割り切れなければならない。

$n = 11$ のときは、条件をみたす。

$n \neq 11$ のとき、

$|11 - n| \geqq n^2 + n + 3$ が必要。

$1 \leqq n \leqq 10$ のとき、

$11 - n \geqq n^2 + n + 3 \Leftrightarrow n^2 + 2n - 8 \leqq 0$　$(n+4)(n-2) \leqq 0$ をみたすのは $n = 1, 2$ の時。

$n \geqq 12$ の時は $n - 11 \geqq n^2 + n + 3 \Leftrightarrow n^2 + 14 \leqq 0$ をみたさない。

逆に、$n = 1, 2$ のとき $11 - n$ は $n^2 + n + 3$ で割り切れる。

よって $n = 1, 2, 11$ //

$\boxed{2}$

実数 a, b についての次の条件 $(*)$ を考える。

$(*)$ ある実数係数の 2 次式 $f(x)$ と、ある実数 c に対して、x についての恒等式

$$\frac{1}{8}x^4 + ax^3 + bx^2 = f(f(x)) + c$$

が成り立つ。

この条件 $(*)$ を満たす点 (a, b) 全体の集合を座標平面上に図示せよ。

$\boxed{3}$

n は正の整数とする。1 枚の硬貨を投げ、表が出たら 1、裏が出たら 2 と記録する。この試行を n 回繰り返し、記録された順に数字を左から並べて n 桁の数 X を作る。ただし、数の表し方は十進法とする。このとき、X が 6 で割り切れる確率を求めよ。

$f(x) = px^2 + qx + r$ とおくと、

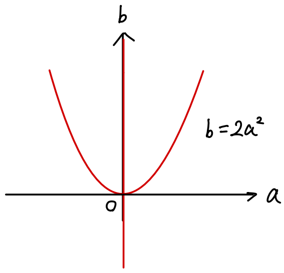
$$f(f(x)) = p(px^2+qx+r)^2 + q(px^2+qx+r) + r$$
$$= p^3x^4 + 2p^2qx^3 + (2p^2r + pq^2 + pq)x^2 + (2pqr + q^2)x + pr^2 + qr + r$$

よって

$$\begin{cases} p^3 = \frac{1}{8} \\ 2p^2q = a \\ 2p^2r + pq^2 + pq = b \\ 2pqr + q^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} p = \frac{1}{2} \\ q = 2a \\ \frac{r}{2} + 2a^2 + a = b \quad \cdots ☆ \\ 2a(r + 2a) = 0 \end{cases}$$

(i) $a = 0$ のとき
 b は任意の実数

(ii) $a \neq 0$ のとき
 $r = -2a$ を☆に代入して. $b = 2a^2$



$\boxed{3}$

作った数を A_n とする.

A_n は偶数かつ 3で割り切れる.

まず. A_n が偶数なので最後は裏でなければならない。

よって求める確率は (A_{n-1} が 3で割った1余る確率) $\times \frac{1}{2}$

A_n が 3で割り切れる確率を a_n, 1余る確率を b_n, 2余る確率を c_n とすると.

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n$$
$$= -\frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}$$

$\therefore$ $b_n = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$

よって求める確率は $\frac{1}{2}b_{n-1} = \underline{\frac{1}{6}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}$

$\boxed{4}$

座標平面において、曲線 $C_1 : y = x^2 - 2|x|$ と曲線 $C_2 : y = x^2 - 5x + \frac{7}{4}$ を考える。また、直線 $l_1 : x = \frac{3}{2}$ を考える。

(1) 点 $(0, 0)$ と異なる点で C_1 と接し、さらに C_2 とも接するような直線 l_2 がただ一つ存在することを示せ。

(2) C_1 と l_2 の共有点を P とし、その x 座標を a とする。また、l_1 と l_2 の共有点を Q とし、C_1 と l_1 の共有点を R とする。曲線 C_1 の $a \leqq x \leqq \frac{3}{2}$ の部分、線分 PQ および線分 QR で囲まれる図形の面積を求めよ。

(1)

C_2上の点A $(t,\ t^2-5t+\frac{7}{4})$ における接線は、

$y'=2x-5$ より

$y=(2t-5)x-t^2+\frac{7}{4}$

これが原点以外の1点でC_1と接することを示す。

(i) $x>0$ で接するとすると、

$x^2-2x=(2t-5)x-t^2+\frac{7}{4}$

$x^2-(2t-3)x+t^2-\frac{7}{4}=0$ が重解をもつので

$D=(2t-3)^2-4(t^2-\frac{7}{4})$

$=-12t+16$

$=0$　　　　∴ $t=\frac{4}{3}$

このとき、C_1とl_2の共有点のx座標は $-\frac{1}{6}$ となり仮定に反する。

(ii) $x<0$ で接するとすると、

$x^2+2x=(2t-5)x-t^2+\frac{7}{4}$

$x^2-(2t-7)x+t^2-\frac{7}{4}=0$ が重解をもつ。

$D=(2t-7)^2-4(t^2-\frac{7}{4})$

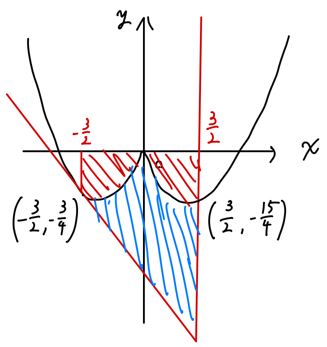
$=-28t+56$

$=0$　　　　∴ $t=2$

このとき C_1とl_2の共有点のx座標は $-\frac{3}{2}$ となり。仮定を満たす。

(i)(ii)より示せた。

(2)



図より

求める面積は

$\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}+\frac{15}{4}\right)\times 3-2\int_0^{\frac{3}{2}}(-x^2+2x)\,dx$

$=\frac{27}{4}-2\left[-\frac{1}{3}x^3+x^2\right]_0^{\frac{3}{2}}=\frac{9}{2}$

$\boxed{5}$

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。s, t, u は 0 でない実数とする。直線 OA 上の点 L、直線 OB 上の点 M、直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つようにとる。

s, t, u が $\frac{1}{s} + \frac{2}{t} + \frac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき、3 点 L, M, N の定める平面 LMN は、s, t, u の値に無関係な一定の点を通ることを示せ。

$$\frac{1}{4s} + \frac{2}{4t} + \frac{3}{4u} = 1 \quad \cdots ①$$

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{OC}$ となるように点 P をとると、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4s}\overrightarrow{OL} + \frac{2}{4t}\overrightarrow{OM} + \frac{3}{4u}\overrightarrow{ON}$$

となり、① より P は平面 LMN 上にある。

よって示せた。