ゴウカライズ
数学
2025
大学入試 解答速報

京都大学
理系数学

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

1

問 1 i は虚数単位とする。複素数 z が絶対値が 2 である複素数全体を動くとき、$\left|z-\frac{i}{z}\right|$ の最大値と最小値を求めよ。

問 2 次の定積分の値を求めよ。

(i) $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}dx$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}dx$

2

正の整数 x, y, z を用いて

$$N = 9z^2 = x^6 + y^4 \tag{1}$$

と表される正の整数 N の最小値を求めよ。

3

e は自然対数の底とする。$x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ において定義された次の関数 $f(x), g(x)$ を考える。

$$f(x) = x^2\log x, \quad g(x) = x^2\log x - \frac{1}{1+2\log x}.$$

実数 t は $t > \frac{1}{\sqrt{e}}$ を満たすとする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線に垂直で、点 $(t, g(t))$ を通る直線を l_t とする。直線 l_t が x 軸と交わる点の x 座標を $p(t)$ とする。t が $\frac{1}{\sqrt{e}} < t \leqq e$ の範囲を動くとき、$p(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ。

4

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。s, t, u は 0 でない実数とする。直線 OA 上の点 L、直線 OB 上の点 M、直線 OC 上の点 N を

$$\overrightarrow{\mathrm{OL}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = t\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つようにとる。

(1) s, t, u が $\frac{1}{s}+\frac{2}{t}+\frac{3}{u} = 4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき、3 点 L, M, N の定める平面 LMN は、s, t, u の値に無関係な一定の点 P を通ることを示せ。さらに、そのような点 P はただ一つに定まることを示せ。

(2) 四面体 OABC の体積を V とする。(1) における点 P について、四面体 PABC の体積を V を用いて表せ。

5

θ は実数とする。xyz 空間の 2 点 $\mathrm{A}\left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $\mathrm{P}\left(\cos\theta, \sin\theta, \frac{1}{2}\cos\theta\right)$ を通る直線 AP が xy 平面と交わるとき、その交点を Q とする。θ が $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの点 Q の軌跡を求め、その軌跡を xy 平面上に図示せよ。

6

n は 2 以上の整数とする。1 枚の硬貨を続けて n 回投げる。このとき、k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ に表が出たら $X_k = 1$, 裏が出たら $X_k = 0$ として、$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を定める。

また、

$$Y_n = \sum_{k=2}^{n} X_{k-1}X_k$$

とするとき、Y_n が奇数である確率 p_n を求めよ。

$\boxed{1}$

問 1 i は虚数単位とする。複素数 z が絶対値が 2 である複素数全体を動くとき、$\left|z - \dfrac{i}{z}\right|$ の最大値と最小値を求めよ。

$\boxed{1}$

問 1

極形式で表わす。

$|z| = 2$ より、$z = 2(\cos\theta + i\sin\theta)$ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ とできる。

ここで、

共役な複素数をとる。

$$z - \frac{i}{z} = 2(\cos\theta + i\sin\theta) - \frac{i}{2(\cos\theta + i\sin\theta)} = 2(\cos\theta + i\sin\theta) - \frac{i}{2}(\cos\theta - i\sin\theta)$$

$$= \left(2\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right) + i\left(2\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)$$

よって $\left|z - \dfrac{i}{z}\right|^2$ を考えて、

$$\left|z - \frac{i}{z}\right|^2 = \left(2\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta\right)^2 + \left(2\sin\theta - \frac{1}{2}\cos\theta\right)^2$$

$$= 4\cos^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{4}\sin^2\theta + 4\sin^2\theta - 2\sin\theta\cos\theta + \frac{1}{4}\cos^2\theta$$

$$= 4 + \frac{1}{4} - 4\sin\theta\cos\theta$$

$$= \frac{17}{4} - 2\sin 2\theta$$

よって $-1 \leqq \sin 2\theta \leqq 1$ であるから、

$$\frac{17}{4} - 2 \times 1 \leqq \left|z - \frac{i}{z}\right|^2 = \frac{17}{4} - 2\sin 2\theta \leqq \frac{17}{4} - 2 \times (-1)$$

$$\therefore \quad \frac{9}{4} \leqq \left|z - \frac{i}{z}\right|^2 \leqq \frac{25}{4}$$

よって $\left|z - \dfrac{i}{z}\right|_{Max} = \dfrac{5}{2}$ ，$\left|z - \dfrac{i}{z}\right|_{min} = \dfrac{3}{2}$ を得る。

問 2 次の定積分の値を求めよ。

(i) $$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}dx$$

(ii) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}dx$$

問2

x^2+1, $\int_0^{\sqrt{3}}$ の形を見て、$x=\tan\theta$ と置換できそうだと予想する.

(i) $$\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x\sqrt{x^2+1}+2x^3+1}{x^2+1}dx$$

< $x=\tan\theta$ >　$x: 0\to\sqrt{3}$ / $\theta: 0\to\frac{\pi}{3}$

$\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ にして微分の接触形をつくる.

$$(与式) = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan\theta\sqrt{1+\tan^2\theta}+2\tan^3\theta+1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cancel{\cos^2\theta}\cdot\frac{1}{\cancel{\cos^2\theta}}\left\{\tan\theta\cdot\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}+2\tan^3\theta+1\right\}d\theta$$

$1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+2\tan^3\theta+1\right)d\theta$$

$$= 2\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan^3\theta\, d\theta}_{=I\text{ とおく}} + \left[\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= 2I + \left\{\left(\frac{\pi}{3}+2\right)-\left(0+\frac{1}{1}\right)\right\}$$

$$= 2I + 1 + \frac{\pi}{3}$$

$(\tan\theta)' = \frac{1}{\cos^2\theta}$

I について

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta\cdot\tan^2\theta\, d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\tan\theta\cdot\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\tan\theta\cdot(\tan\theta)'-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right\}d\theta$$

$$= \left[\frac{1}{2}(\tan\theta)^2+\log|\cos\theta|\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{3})^2+\log\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\cdot 0+\log 1\right)$$

$$= \frac{3}{2}-\log 2$$

よって

$$(与式) = 2I+1+\frac{\pi}{3} = 4+\frac{\pi}{3}-2\log 2$$

(ii) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{\cancel{2}\sin^2\frac{x}{2}}{\cancel{2}\cos^2\frac{x}{2}}}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\tan\frac{x}{2}\right|dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\frac{x}{2}dx$$

(この形をみたら半角公式)

$$= \left[-2\log\left|\cos\frac{x}{2}\right|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= -2\times\left\{\log\frac{\sqrt{2}}{2}-\log 1\right\}$$

$$= \log 2$$

$\boxed{2}$

正の整数 x, y, z を用いて

$$N = 9z^2 = x^6 + y^4$$

と表される正の整数 N の最小値を求めよ。

$\boxed{2}$

結局，$9z^2 = x^6 + y^4$ を満たす (x, y, z) の組の中で z が最小となるものを探す.

$9z^2 = x^6 + y^4$ より、$9z^2 \equiv x^6 + y^4 \equiv 0 \pmod 3$

ここで、$\begin{cases} p \equiv 0 \Rightarrow p^2, p^4, p^6 \equiv 0 \\ p \equiv \pm 1 \Rightarrow p^2, p^4, p^6 \equiv 1 \end{cases} \pmod 3$ より、

$x \equiv y \equiv 0$ であることが必要

よてこの下で $x = 3X$, $y = 3Y$ とする. $(X, Y \in \mathbb{N})$ これを与式に代入して.

$$9z^2 = (3X)^6 + (3Y)^4$$

$$\therefore 9z^2 = 729X^6 + 81Y^4$$

$$\therefore z^2 = 81X^6 + 9Y^4 \quad —(*)$$

$(*)$ を満たす z のうち最小のものを探す.

まず、z^2 は X, Y について増加関数であり、

$z^2|_{(X,Y)=(1,1)} < z^2|_{(X,Y)=(1,2)} < z^2|_{(X,Y)=(2,1)} < z^2|_{X \geqq 2, Y \geqq 2 \text{なる} (X,Y)}$ である.

① $(X, Y) = (1, 1)$ のとき、$z^2 = 81 + 9 = 90$ であり、$z = 3\sqrt{10}$ より $z \in \mathbb{N}$ に反するので不適.

② $(X, Y) = (1, 2)$ のとき. $z^2 = 81 + 9 \cdot 16 = 225$ であり、$z = 15$ より適切、

よて以上の議論より. 最小となる $z = 15$ でこのとき $N = 9 \times 15^2 = \underline{2025}$

$\boxed{3}$

e は自然対数の底とする。$x > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ において定義された次の関数 $f(x), g(x)$ を考える。

$$f(x) = x^2 \log x, \quad g(x) = x^2 \log x - \frac{1}{1 + 2\log x}.$$

実数 t は $t > \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ を満たすとする。曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(t, f(t))$ における接線に垂直で、点 $(t, g(t))$ を通る直線を l_t とする。直線 l_t が x 軸と交わる点の x 座標を $p(t)$ とする。t が $\dfrac{1}{\sqrt{e}} < t \leqq e$ の範囲を動くとき、$p(t)$ の取りうる値の範囲を求めよ。

$\boxed{3}$

$f'(x) = 2x\log x + x$ であり、$f'(x) = 2x\left(\log x + \frac{1}{2}\right)$ より $\left.\log x + \frac{1}{2}\right|_{x=\frac{1}{\sqrt{e}}} = 0$ に注意すると、$f'(x)$ は区間で正。

この下で、条件を満たす l_t の方程式は、

$$l_t : y = -\frac{1}{f'(t)}(x - t) + g(t) \quad \text{—} \ (*)$$

← $x=t$ における $y=f(x)$ の法線の傾きは $-\dfrac{1}{f'(t)}$

これが x軸と交わるとき、その座標は $(p(t), 0)$ なので、$(*)$ に代入して、

$$0 = -\frac{1}{f'(t)}(p(t) - t) + g(t)$$

$$\begin{aligned}
\therefore\ p(t) &= t + f'(t)g(t) \\
&= t + (2t\log t + t)\left(t^2\log t - \frac{1}{1+2\log t}\right) \\
&= \cancel{t} + 2t^3(\log t)^2 + t^3\log t - \cancel{t} \\
&= 2t^3(\log t)^2 + t^3\log t
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{よって}\ p'(t) &= 6t^2(\log t)^2 + 2\cancel{t^3}^{\,2}\cdot 2(\log t)\cdot\frac{1}{\cancel{t}} + 3t^2\log t + \cancel{t^3}^{\,2}\cdot\frac{1}{\cancel{t}} \\
&= 6t^2(\log t)^2 + 7t^2(\log t) + t^2 \\
&= t^2(6\log t + 1)(\log t + 1)
\end{aligned}$$

よって $\dfrac{1}{\sqrt{e}} < t \leqq e$ の範囲を動くとき、$\mathrm{sgn}\, p'(t) = \mathrm{sgn}\left(\log t + \frac{1}{6}\right)$ より、以下の増減表を得る。

t	$\frac{1}{\sqrt{e}}$		$e^{-\frac{1}{6}}$		e
$p'(t)$		$-$	0	$+$	
$p(t)$		↘		↗	

$p\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = 0 \quad p(e) = 3e^3$

$p\left(e^{-\frac{1}{6}}\right) = 2e^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{36} + e^{-\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{9\sqrt{e}}$

よって $p(t)$ の値域は、$-\dfrac{1}{9\sqrt{e}} \leqq p(t) \leqq 3e^3$

4

座標空間の 4 点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。s, t, u は 0 でない実数とする。直線 OA 上の点 L、直線 OB 上の点 M、直線 OC 上の点 N を

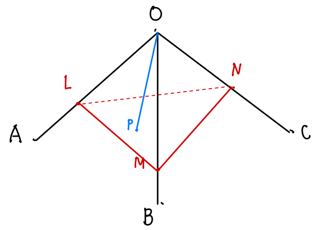
$$\overrightarrow{\mathrm{OL}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}}=u\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

が成り立つようにとる。

(1) s, t, u が $\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ を満たす範囲であらゆる値をとるとき、3 点 L, M, N の定める平面 LMN は、s, t, u の値に無関係な一定の点 P を通ることを示せ。さらに、そのような点 P はただ一つに定まることを示せ。

4

(1)



$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする. 但し, それぞれのベクトルは一次独立.

s, t, u に無関係な点Pについて,

$$\overrightarrow{OP}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}\quad(\alpha,\beta,\gamma \text{ は定数})$$

とできる. 条件を満たすとき, Pは平面LMN上に常にあるので,

『$\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ を満たす全ての (s,t,u) について,

$$\overrightarrow{OP}=x\overrightarrow{OL}+y\overrightarrow{OM}+z\overrightarrow{ON}\quad(\text{但し, } \underbrace{x+y+z=1}_{(ア)})\ -(*)$$

なる (x,y,z) が存在するような (α,β,γ) を求める.』

ここで, $\overrightarrow{OL}=s\vec{a}$, $\overrightarrow{OM}=t\vec{b}$, $\overrightarrow{ON}=u\vec{c}$ より,

$(*) \Leftrightarrow \alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=xs\vec{a}+yt\vec{b}+zu\vec{c}$

赤二重線部に注意して, 係数比較をして,

$$\begin{cases}\alpha=xs & -① \\ \beta=yt & -② \\ \gamma=zu & -③\end{cases}$$

よって『』は,

$\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ を満たす全ての (s,t,u) について, ①②③(ア)を満たす (x,y,z) が存在するような

(α,β,γ) の条件に帰着する.

$s,t,u\neq 0$ に注意して,

$$\begin{cases}① \\ ② \\ ③\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\dfrac{\alpha}{s} & -①' \\ y=\dfrac{\beta}{t} & -②' \\ z=\dfrac{\gamma}{u} & -③'\end{cases}$$

これを(ア)に代入して, $\dfrac{\alpha}{s}+\dfrac{\beta}{t}+\dfrac{\gamma}{u}=1$ ─(イ)

よって, これは,

$\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ を満たす全ての (s,t,u) について, $\dfrac{\alpha}{s}+\dfrac{\beta}{t}+\dfrac{\gamma}{u}=1$ ─(イ) が成立するための (α,β,γ) の条件となる.

└ 全ての ⇒ 必要条件から しぼりこみ!

ここで $(s,t,u)=\left(1,2,\dfrac{3}{2}\right)\left(\dfrac{1}{2},2,3\right)(1,1,3)$ は $\dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ をみたすので, これらは(イ)を満たす必要がある.

この時点で存在するとしても 高々1個である.

$$\begin{cases}\alpha+\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{2}{3}\gamma=1 \\ 2\alpha+\dfrac{\beta}{2}+\dfrac{\gamma}{3}=1 \\ \alpha+\beta+\dfrac{\gamma}{3}=1\end{cases} \Leftrightarrow (\alpha,\beta,\gamma)=\left(\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{4}\right)$$ となる必要があり,

このとき, 逆に

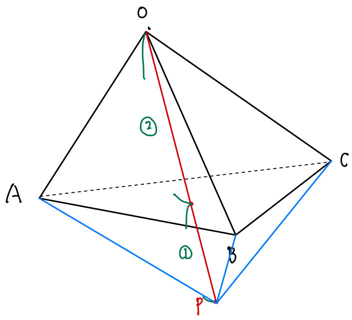
(イ) $\Leftrightarrow \dfrac{1}{4s}+\dfrac{1}{2t}+\dfrac{3}{4s}=1$ $\therefore \dfrac{1}{s}+\dfrac{2}{t}+\dfrac{3}{u}=4$ より, 十分である.

よって題意を満たす P は存在し, かつそのような P は ただ1つ である. □

(2) 四面体 OABC の体積を V とする。(1) における点 P について、四面体 PABC の体積を V を用いて表せ。

$\boxed{4}$

(2) (1) より $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{4}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{3}{4}\vec{c}$ であり、各係数の和は $\frac{3}{2}$ であるため、位置関係は以下のようになる。



よって P-ABC の体積は $\frac{1}{2}V$

$\boxed{5}$

θ は実数とする。xyz 空間の 2 点 $\mathrm{A}\left(0, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$, $\mathrm{P}\left(\cos\theta, \sin\theta, \dfrac{1}{2}\cos\theta\right)$ を通る直線 AP が xy 平面と交わるとき、その交点を Q とする。θ が $-\dfrac{\pi}{4} < \theta < \dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くときの点 Q の軌跡を求め、その軌跡を xy 平面上に図示せよ。

$\boxed{5}$

直線AP上の点Rは媒介変数 $t\,(\in \mathbb{R})$ を用いて、

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + t\,\overrightarrow{AP}$$

とできるので成分表示すると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\cos\theta \\ t\sin\theta \\ \frac{1}{2}t\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{4}(1-t) \end{pmatrix} \quad -(*)$$

となる。

直線APと xy 平面の交点Qは z成分 $=0$ であるので、

$$\frac{1}{2}t\cos\theta + \frac{\sqrt{2}}{4}(1-t) = 0$$

$$\therefore \quad (2\cos\theta - \sqrt{2})\,t = -\sqrt{2}$$

$$\therefore \quad t = \frac{1}{1-\sqrt{2}\cos\theta} \quad -①$$

(但し $-\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{4}$ より $\cos\theta > \frac{1}{\sqrt{2}}$ で $1-\sqrt{2}\cos\theta < 0$) ②

① を $(*)$ に代入して、$\mathrm{Q}(x, y, 0)$ は、

$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} & -③ \\[2mm] y = \dfrac{\sin\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} & -④ \end{cases}$$

また、$\theta \to -\theta$ で $(x, y) \to (x, -y)$ より、$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{4}$ で考える。 $-②'$

今、この下でQの軌跡を C とすると、

$$(x, y) \in C \iff \exists\theta\,(②', ③, ④)$$

(まず、③④を変形)

③は②'の下で、 $x(1-\sqrt{2}\cos\theta) = \cos\theta \iff (1+\sqrt{2}x)\cos\theta = x$

$$\iff \cos\theta = \frac{x}{1+\sqrt{2}x} \quad \left(\because\ x \neq -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad -⑤$$

④は②'の下で

$$\begin{cases} y^2 = \dfrac{\sin^2\theta}{(1-\sqrt{2}\cos\theta)^2} \\ y \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y^2 = \dfrac{1-\cos^2\theta}{(1-\sqrt{2}\cos\theta)^2} & -⑥ \\ y \geqq 0 & -⑦ \end{cases}$$

よって $\exists\theta\,(②', ③, ④) \iff \exists\theta\,(②', ⑤, ⑥, ⑦)$

⑥に⑤を代入して、

$$y^2 = \frac{1-\left(\frac{x}{1+\sqrt{2}x}\right)^2}{\left(1-\frac{\sqrt{2}x}{1+\sqrt{2}x}\right)^2} \qquad \therefore \quad y^2 = (1+\sqrt{2}x)^2 - x^2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 1 = (x+\sqrt{2})^2 - 1$$

両辺 $\times\,(1+\sqrt{2}x)^2$

$$\therefore \quad (x+\sqrt{2})^2 - y^2 = 1 \quad -⑧$$

よって $\exists\theta\,(②', ⑤, ⑥, ⑦) \iff \exists\theta\,(②', ⑤, ⑦, ⑧) \iff \exists\theta\,(②', ③)$ かつ $(⑦, ⑧)$ $(\because\ ③ \Leftrightarrow ⑤)$

代入法の原理

$\hookrightarrow$ θに無関係

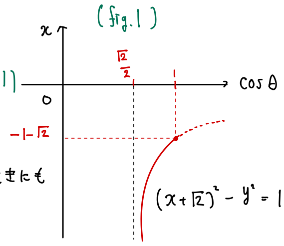
$$\begin{cases} x = \dfrac{\cos\theta}{1-\sqrt{2}\cos\theta} \\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

について、$\cos\theta$, x 平面に図示すると、次のとおり。(fig.1)

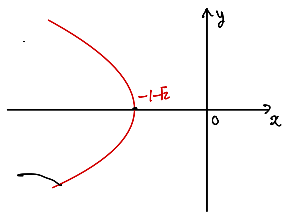
よって $\exists(②', ③) \iff x < -1-\sqrt{2}$. $-⑨$

以上より $(x, y) \in C \iff ⑦$ かつ ⑧ かつ ⑨ より、これを図示し、$-\frac{\pi}{4} < \theta \leqq 0$ のときにも注意して、Qの軌跡は右のとおり。(fig.2)

(fig.1)



(fig.2)



6

n は 2 以上の整数とする。1 枚の硬貨を続けて n 回投げる。このとき、k 回目 $(1 \leqq k \leqq n)$ に表が出たら $X_k = 1$, 裏が出たら $X_k = 0$ として、$X_1, X_2, \ldots, X_n$ を定める。

また、

$$Y_n = \sum_{k=2}^{n} X_{k-1} X_k$$

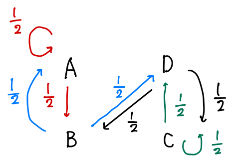
とするとき、Y_n が奇数である確率 p_n を求めよ。

6

Y_n：奇数，X_n：0 の確率を a_n
Y_n：奇数，X_n：1 の確率を b_n
Y_n：偶数，$X_n = 0$ の確率を c_n
Y_n：偶数，$X_n = 1$ の確率を d_n とする.

ここで、求めたい確率を p_n とすると、$p_n = a_n + b_n$ である.

また、a_n, b_n, c_n, d_n のときの状態を A, B, C, D とすると、下の推移図が描ける.



よって、$n \geqq 2$ で、

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) & \text{—①} \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + d_n) & \text{—②} \\ c_{n+1} = \frac{1}{2}(c_n + d_n) & \text{—③} \\ d_{n+1} = \frac{1}{2}(b_n + c_n) & \text{—④} \end{cases}$$

が成立.

ここで $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$ —⑤ と ①〜④ を合わせると、

$$\begin{cases} a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + c_n + d_n) = \frac{1}{2} \\ b_{n+1} + d_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n + c_n + d_n) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (n \geqq 2)$$

$a_2 = 0$　$b_2 = \frac{1}{4}$　$c_2 = \frac{1}{2}$　$d_2 = \frac{1}{4}$ より、

$$\begin{cases} a_n + c_n = \frac{1}{2} & \text{—⑥} \\ b_n + d_n = \frac{1}{2} & \text{—⑦} \end{cases} \quad (n \geqq 2) \text{ である.}$$

ここで、① + ② より

$$\begin{aligned} a_{n+1} + b_{n+1} &= a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}d_n = a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - b_n\right) \quad (\because ⑦) \\ &= a_n + \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2}(a_{n-1} + b_{n-1}) + \frac{1}{4} \quad (\because ①) \end{aligned}$$

$$\therefore \quad a_{n+2} + b_{n+2} = \frac{1}{2}(a_n + b_n) + \frac{1}{4}$$

$$\therefore \quad p_{n+2} = \frac{1}{2}p_n + \frac{1}{4} \quad \text{—}(*) \quad (n \geqq 2) \leftarrow \text{これをとく.}$$

2ヶとばしになっているので、n の偶奇で場合分け.

(i) n：偶数のとき.

$n = 2N$ $(N \in \mathbb{N})$ とすると.

$$(*) \Leftrightarrow p_{2(N+1)} = \frac{1}{2}p_{2N} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow p_{2(N+1)} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_{2N} - \frac{1}{2}\right)$$

$p_2 = a_2 + b_2 = \frac{1}{4}$

$$\therefore \quad p_{2N} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(p_2 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(-\frac{1}{4}\right)$$

よって

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \\ &= \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} \end{aligned}$$

(ii) n：奇数のとき.

$n = 2N + 1$ とすると. $(N \in \mathbb{N})$

$$(*) \Leftrightarrow p_{2(N+1)+1} = \frac{1}{2}p_{2N+1} + \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow p_{2(N+1)+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left(p_{2N+1} - \frac{1}{2}\right)$$

$p_3 = \frac{1}{4}$

$$\therefore \quad p_{2N+1} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(p_3 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}$$

よって

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2} - 1} \\ &= \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\} \end{aligned}$$

以上求める確率 p_n は

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & (n\text{：偶数}) \\ \frac{1}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\} & (n\text{：奇数}) \end{cases}$$