ゴウカライズ
数学
2025
大学入試 解答速報

大阪大学
理系数学

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

1

$$\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \quad \overrightarrow{OB} = \vec{b}$$

とする。

(1)

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\angle\mathrm{ABC} = 3 \cdot t \cdot \frac{1}{3} = t.$$

(2) 点 R は, 半直線 OB 上にあるので

$$\overrightarrow{OR} = k\,\vec{b}$$

を満たす $k > 0$ がただ 1 つ存在する。また点 P は線分 AB を 2 : 1 に内分する点なので

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}.$$

これらと, AR ⊥ OP だから

$$\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{OP} = 0.$$

$$\therefore \quad (\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OA}) \cdot \overrightarrow{OP} = 0.$$

$$\therefore \quad (-\vec{a} + k\,\vec{b}) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}\right) = 0.$$

$$\therefore \quad (-\vec{a} + k\,\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 2\,\vec{b}) = 0.$$

$$\therefore \quad -9 - 2t + kt + 2kt^2 = 0.$$

$$\therefore \quad k = \frac{2t+9}{t(2t+1)}.$$

$$\therefore \quad \mathrm{OR} = \frac{2t+9}{2t+1}.$$

(3)

$$\begin{aligned}
\text{点Rが線分MB上にある} &\iff \frac{t}{2} \leqq \frac{2t+9}{2t+1} \leqq t \\
&\iff 2t^2 - t - 9 \geqq 0 \text{かつ}, 2t^2 - 3t - 18 \leqq 0 \\
&\iff \frac{1+\sqrt{73}}{4} \leqq t \leqq \frac{3+3\sqrt{17}}{4}.
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$

(1) $f'(x)=3x^2+6px+3m$ だから解と係数の関係によって

$$\begin{cases}\alpha+\beta=-2p\\ \alpha\beta=m.\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad f(\alpha)-f(\beta)&=\int_\beta^\alpha f'(x)dx=3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3=\frac{(\beta-\alpha)^3}{2}\\ &=\frac{\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}}{2}=\frac{(4p^2-4m)^{\frac{3}{2}}}{2}=4(p^2-m)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}$$

(2) 任意の $x\in\mathbb{R}$ に対し

$$f''(x)=6x+6p$$

だから, 変曲点は $(-p,2p^3-3mp)$. ここで, $f(\alpha)-f(\beta)=4(p^2-m)^{\frac{3}{2}}=4\,(\iff p^2-m=1)$ を満たすような実数 m が存在するとき, 変曲点は $(-p,-p^3+3p)$. よって, 求める軌跡を $\mathcal{L}$ とすると, 座標平面上の任意の点 (x,y) に対し

$$\begin{aligned}(x,y)\in\mathcal{L}&\iff\begin{cases}x=-p\\ y=-p^3+3p\end{cases}\text{となる}p\in\mathbb{R}\text{が存在}\\ &\iff y=x^3-3x.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \mathcal{L}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid y=x^3-3x\}.$$

ひとこと 3 次関数の極大値 − 極小値は上のように $\frac{1}{6}$ 公式で簡単に計算できる。

3

座標空間内の点 $\mathrm{P}=(x,y,z)$ に対し

$$\begin{cases} z=0 \\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=\left|\overrightarrow{AO}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AP}\right|\cos 30^\circ \\ y \geqq 0 \end{cases}$$

を満たす座標空間内の点 $\mathrm{P}=(x,y,z)$ の軌跡は

$$\begin{cases} z=0 \\ \overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AP}=\left|\overrightarrow{AO}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AP}\right|\cos 30^\circ \\ y \geqq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=0 \\ 2-y=\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y-1)^2+1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y \geqq 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z=0 \\ 2(2-y)^2=3x^2+3(y-1)^2+3 \\ 0\leqq y\leqq 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z=0 \\ 2(2-y)^2=3x^2+3(y-1)^2+3 \\ 0\leqq y\leqq 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z=0 \\ x^2+\dfrac{(y+1)^2}{3}=1 \\ 0\leqq y\leqq 2 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} z=0 \\ x^2+\dfrac{(y+1)^2}{3}=1 \\ y\geqq 0 \end{cases}$$

なので

$$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid z=0, x^2+\frac{(y+1)^2}{3}=1, y\geqq 0\right\}.$$

よって, 定義域が

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+\frac{(y+1)^2}{3}=1, y\geqq 0\right\}.$$

である関数 $(x+1)(y+1)$ の最大値と最小値を求めればよいが, これは, 任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対し

$$x^2+\frac{(y+1)^2}{3}=1\text{かつ}, y\geqq 0 \iff x=\cos\theta\text{かつ}, \frac{y+1}{\sqrt{3}}=\sin\theta\text{かつ}, \sin\theta\geqq\frac{1}{\sqrt{3}}\text{となる}\theta\in[0,2\pi)\text{が存在}$$
$$\iff x=\cos\theta\text{かつ}, y+1=\sqrt{3}\sin\theta\text{かつ}, \theta\in[\alpha,\beta]\text{が存在}$$

であることから, 定義域 $I:=[\alpha,\beta]$ 上の関数 $(x+1)(y+1)=\sqrt{3}\sin\theta(\cos\theta+1)$ の最大値と最小値を求めることと同じである。ただし、α,β は $\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\quad(\theta\in(0,2\pi])$ がもつ 2 解で, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}<\beta<\pi$ である。

$$f(\theta)=\sqrt{3}\sin\theta(\cos\theta+1)\quad(\theta\in I)$$

で定めると

$$f'(\theta)=\sqrt{3}(\cos^2\theta+\cos\theta-\sin^2\theta)=\sqrt{3}(\cos\theta+1)(2\cos\theta-1)\quad(\theta\in I).$$

よって, 有界閉区間 I 上で連続な関数 $f(\theta)$ の最大値と最小値はともに, $f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{9}{4}, f(\alpha)=\cos\alpha+1, f(\beta)=\cos\beta+1$ が候補。$\cos\beta<0<\cos\alpha<1$ に注意すると

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{9}{4}$$

が求める最大値で

$$f(\beta)=\cos\beta+1=-\sqrt{1-\frac{1}{3}}+1=-\frac{\sqrt{6}}{3}+1.$$

が求める最小値。

ひとこと　円錐面の方程式と呼ばれている問題です。知っていれば, P が 2 次曲線上にあることが分かるので安心して計算できます。

4

(1) $t>0$ とする。任意の $x \in [t, 2t]$ に対し

$$-1 \leqq \sin x \leqq 1,$$

すなわち

$$-\frac{1}{x^2} \leqq \frac{\sin x}{x^2} \leqq \frac{1}{x^2}.$$

$$-\int_t^{2t} \frac{dx}{x^2} \leqq \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx \leqq \int_t^{2t} \frac{dx}{x^2}.$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{2t} \leqq \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx \leqq \frac{1}{2t}.$$

$$\therefore \quad -\frac{1}{t} < \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx < \frac{1}{t}.$$

(2) まず計算に必要な極限値を出しておく。任意の $t>0$ に対し

$$-\frac{1}{t} < \frac{\sin t}{t} < \frac{1}{t} \quad \cdots ①$$

と

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} = \lim_{t\to\infty} \left(-\frac{1}{t}\right) = 0 \quad \cdots ②$$

が成り立つからはさみうちの原理により

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sin t}{t} = 0 \quad \cdots ③.$$

同様にして,

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sin 2t}{2t} = 0 \quad \cdots ④.$$

そして, ①, ②とはさみうちの原理によって

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx = 0 \quad \cdots ⑤.$$

部分積分を用いると, 任意の $t>0$ に対し

$$\begin{aligned} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx &= \int_t^{2t} \left[\frac{-\sin x}{x}\right]_t^{2t} - \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx \\ &= -\frac{\sin 2t}{2t} + \frac{\sin t}{t} - \int_t^{2t} \frac{\sin x}{x^2} dx. \end{aligned}$$

$$\therefore \quad \lim_{t\to\infty} \int_t^{2t} \frac{\cos x}{x} dx = 0 \quad (\because ③, ④, ⑤).$$

(3)　$t>2$ のとき

$$\begin{aligned}\int_1^t \frac{f(x)}{x}dx &= \frac{1}{2}\left(\int_1^t \frac{\cos x}{x}dx - \int_1^t \frac{\cos 2x}{x}dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_1^t \frac{\cos x}{x}dx - \frac{1}{2}\int_1^t \frac{\cos 2x}{2x}(2x)'dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_1^t \frac{\cos x}{x}dx - \int_2^{2t} \frac{\cos x}{x}dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\int_1^2 \frac{\cos x}{x}dx + \int_2^t \frac{\cos x}{x}dx - \int_2^{2t} \frac{\cos x}{x}dx\right)\\ &= \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\cos x}{x}dx - \frac{1}{2}\int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}dx.\end{aligned}$$

そして

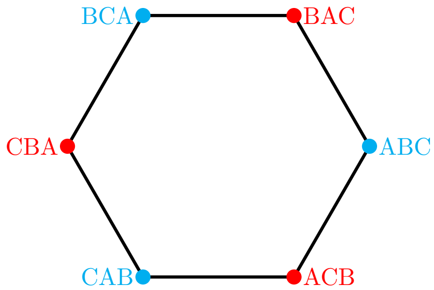
$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\int_t^{2t} \frac{\cos x}{x}dx = 0$$

だから

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x}dx = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{\cos x}{x}dx$$

$\boxed{5}$

(1)　A, B, C を左から一列に並べるとき, その並べ方は $3! = 6$ 種類ある。その 6 つ文字列を頂点とし, 文字列 w をコインを一回投げると文字列 w' になり得るとき, 頂点 w と w' を辺で結んだグラフを考える。コインを n 回投げ終わったときにできている文字列の頂点に点 X があると考える。以下, コインを n 回投げ終わったとき, X が CAB にいる確率を r_n とする。



$$\begin{cases} X = \mathrm{ABC}, \mathrm{BCA}, \mathrm{CAB} & (n : \text{偶数}) \\ X = \mathrm{BAC}, \mathrm{CBA}, \mathrm{ACB} & (n : \text{奇数}) \end{cases} \quad \cdots (*)$$

だから

$$\begin{cases} p_{2k} + q_{2k} + r_{2k} = 1 & \cdots ① \\ q_{2(k+1)} = \dfrac{1}{4}p_{2k} + \dfrac{1}{2}q_{2k} + \dfrac{1}{4}r_{2k} & \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{cases} ① \\ ② \end{cases} \iff \begin{cases} ① \\ q_{2(k+1)} = \dfrac{1}{2}q_{2k} + \dfrac{1}{4}(1 - q_{2k}) = \dfrac{1}{4}q_{2k} + \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ① \\ q_{2(k+1)} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{4}\left(q_{2k} - \dfrac{1}{3}\right) & \cdots ③. \end{cases}$$

ここで, $q_2 = \dfrac{1}{4}$ だから, ③ の解は

$$q_{2k} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^k \quad \cdots ④.$$

同様にして

$$\begin{cases} ① \\ r_1 = \dfrac{1}{4} \\ r_{2k} = \dfrac{1}{4}p_{2k} + \dfrac{1}{4}q_{2k} + \dfrac{1}{2}r_{2k} \end{cases}$$

から

$$r_{2k} = q_{2k} \quad \cdots ⑤$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad p_{2k} - q_{2k} &= p_{2k} + q_k + r_{2k} - r_{2k} - 2q_k = 1 - r_{2k} - 2q_k \quad (\because ①) \\ &= 1 - 3q_{2k} \quad (\because ④) \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^k \quad \cdots ⑥ \quad (\because ⑤). \end{aligned}$$

(2) 条件 $(*)$, ④, ⑥ によって

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{1}{3} + \dfrac{2}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n & (n : \text{偶数}) \\ = 0 \quad (n : \text{奇数}) \end{cases}$$

ひとこと

- グラフが対称的であることから $q_{2k} = r_{2k}$
- $p_{2k} \to \dfrac{1}{3}, q_{2k} \to \dfrac{1}{3} \quad (k \to \infty)$

の 2 つが直感的分かるので, 検算に使えます。もちろん p_1, q_1 も検算の役に立ちます。

最後に 答えの数値が間違っていないか等は, 阪大作問サークル（@OU_sakumon）様の解答速報を参考にさせていただきました。ありがとうございました。2, 3, 5 でオリジナリティが多少は出せたと思います。流石に 1, 4 は誘導に乗るだけなので何も新規性はないです。