東北大文系 1(2025)

原点を出発点として数直線上を動く点 P がある。試行 $(*)$ を次のように定める。

$$(*)\begin{cases}\text{1 枚のコインを 1 回投げて} \\ \text{・表が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進める。} \\ \text{・裏が出た場合は 1 個のさいころを投げ} \\ \quad\text{奇数の目が出た場合は P を正の向きに 1 だけ進め,} \\ \quad\text{偶数の目が出た場合は P を負の向きに 2 だけ進める。}\end{cases}$$

ただし, コインを投げたとき表裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$, さいころを投げたとき 1 から 6 の目が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{6}$ とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　試行 $(*)$ を 3 回繰り返した後に, 点 P が原点に戻っている確率を求めよ。

(2)　試行 $(*)$ を 6 回繰り返した後に, 点 P が原点に戻っている確率を求めよ。

(3)　n を 3 で割り切れない正の整数とする。試行 $(*)$ を n 回繰り返した後に, 点 P が原点に戻っている確率を求めよ。

訂正　試験中なのか問題冊子に書いてあったのか分からないけど「繰り返した後に」という表現は「繰り返したときに」という意味に変更したそうです。

解答

試行 $(*)$ において, P が今いる位置から $+1$ だけ移動する確率は $\frac{3}{4}$ で -2 だけ移動する確率は $\frac{1}{4}$.

(1)　a, b をそれぞれ試行 $(*)$ を 3 回繰り返したとき, P を $+1$ だけ移動させた回数, -2 だけ移動させた回数とすると $a+b=3$. そして, 試行 $(*)$ を 3 回繰り返したとき, P が原点にいるので $a-2b=0$.

$$a=2, b=1.$$

よって, 求める確率は

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{3}{4}\right)^2\frac{1}{4}=\frac{27}{64}.$$

(2)　a, b をそれぞれ試行 $(*)$ を 6 回繰り返したとき, P を $+1$ だけ移動させた回数, -2 だけ移動させた回数とすると $a+b=6$. そして, 試行 $(*)$ を 6 回繰り返したとき, P が原点にいるので $a-2b=0$.

$$a=4, b=2.$$

よって, 求める確率は

$${}_6\mathrm{C}_4\left(\frac{3}{4}\right)^4\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1215}{4096}.$$

(3)　a, b をそれぞれ試行 $(*)$ を $3k \pm 1$ 回繰り返したとき, P を $+1$ だけ移動させた回数, -2 だけ移動させた回数とする。

$$\text{試行 }(*)\text{ を }3k\pm1\text{ 回繰り返したとき P が原点に戻る} \Longrightarrow \begin{cases} a+b \equiv \pm1 \pmod 3 \\ a-2b \equiv 0 \pmod 3 \end{cases} \Longrightarrow 3b \equiv \pm1 \pmod 3$$

任意の $b \in \mathbb{Z}$ に対し, $3b \equiv \pm1 \pmod 3$ は偽である。よって, 求める確率は 0.

東北大文系 2(2025)

正の実数からなる 2 つの数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = (x_n)^5 \cdot (y_n)^2, \quad y_{n+1} = x_n \cdot (y_n)^6$$

このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　k を実数とする。$a_n = \log_2 x_n, b_n = \log_2 y_n$ とおく。このとき, 数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列となるような k の値をすべて求めよ。

(2)　数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

解答

(1)

$$\begin{cases} x_{n+1} = (x_n)^5(y_n)^2 & \cdots ① \\ y_{n+1} = x_n(y_n)^6 & \cdots ② \\ x_1 = 2 & \cdots ③ \\ y_1 = \dfrac{1}{2} & \cdots ④ \end{cases}$$

① より

$$a_{n+1} = 5a_n + 2b_n \quad \cdots ①'.$$

また ② より

$$b_{n+1} = a_n + 6b_n \quad \cdots ②'.$$

$$\therefore \quad a_n + kb_n = (k+5)a_n + (6k+2)b_n \quad (\because ①', ②').$$

この式から, $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になるための必要十分条件は

$$k(k+5) = 6k + 2.$$

これを解くと

$$k = -1, 2.$$

(2)　数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ は

$$\begin{cases} a_{n+1} - b_{n+1} = 4(a_n - b_n) & \cdots ①'' \\ a_{n+1} + 2b_{n+1} = 7(a_n + 2b_n) & \cdots ②'' \\ a_1 = 1 & \cdots ③' \\ b_1 = -1 & \cdots ④' \end{cases}$$

の解である。①$''$, ③$'$, ④$'$ を用いると

$$a_n - b_n = 2 \cdot 4^{n-1} \quad \cdots ⑤.$$

また, ②$''$, ③$'$, ④$'$ を用いると

$$a_n + 2b_n = -7^{n-1} \quad \cdots ⑥.$$

⑤, ⑥ から

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{4^n - 7^{n-1}}{3} \\ b_n = -\dfrac{2 \cdot 4^{n-1} + 7^{n-1}}{3} \quad \text{(この部分は本来いりません)}. \end{cases}$$

$$\therefore \quad x_n = 2^{\frac{4^n - 7^{n-1}}{3}}.$$

東北大文系 3(2025)

四面体 OABC において, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。点 D は $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たすとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 四面体 OABC の体積を V とするとき, 四角錐 OABCD の体積を V を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

(3) 線分 AD と線分 BC の交点を P とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{b}, \vec{c}$ を用いて表せ。

(4) 四面体 OABC が 1 辺の長さが 1 の正四面体のとき, OD の長さを求めよ。

解答

(1) 線分 BC を 2 : 3 に内分する点を E とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\frac{1}{5}\overrightarrow{\mathrm{AD}}$$

だから, E は, 線分 AD を 1 : 4 に内分する。

$$\therefore \quad \triangle\mathrm{ABD}:\triangle\mathrm{ABE}=\triangle\mathrm{ACD}:\triangle\mathrm{ACE}=\mathrm{AD}:\mathrm{AE}=5:1$$

また

$$\begin{cases}\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{ABE}+\triangle\mathrm{ACE}\\ \text{四角形 ABCD}=\triangle\mathrm{ABD}+\triangle\mathrm{ACD}\end{cases}$$

だから

$$\text{四角形 ABCD}:\triangle\mathrm{ABC}=5:1$$

だから, 求める体積は

$$5V.$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OD}}&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}-3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OC}}-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\\&=-4\vec{a}+3\vec{b}+2\vec{c}\end{aligned}$$

(3) P = E だから P は線分 BC を 2 : 3 に内分するから

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{3}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{b}$$

(4) 四面体 OABC が正四面体だから

$$\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1 \\ , \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

だから

$$\left| \overrightarrow{\mathrm{OD}} \right|^2 = |-4\vec{a} + 3\vec{b} + 2\vec{c}|^2 = 15$$

$$\therefore \quad \mathrm{OD} = \left| \overrightarrow{\mathrm{OD}} \right| = \sqrt{15}.$$

東北大文系 4(2025)

k を正の実数とする。曲線 $y = x(x-2)^2$ と曲線 $y = kx^2$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるような k の値を求めよ。

解答

$$x(x-2)^2 = kx^2 \iff x(x^2-4x+4) = kx^2 \iff x(x^2-(k+4)x-4) = 0.$$

$$(x^2-(k+4)x+4) = 0 \text{ の判別式}) = (k+4)^2 - 16 = k(k+8k) > 0$$

だから, $k > 0$ の値によらず, $x^2-(k+4)x+4 = 0$ は異なる 2 つの実数解をもつ。この 2 解を $\alpha, \beta \quad (\alpha < \beta)$ とすると解と係数の関係から

$$\begin{cases} \alpha + \beta = k+4 & \cdots ① \\ , \alpha\beta = 4 & \cdots ② \end{cases}$$

① の左辺 > 0 だから, $\beta > 0$ であり, ② の右辺 > 0 だから α, β の符号は一致する。

$$\therefore \quad 0 < \alpha < \beta.$$

$$\therefore \quad \begin{cases} \beta \leqq x \leqq \alpha \Longrightarrow kx^2 - x(x-2)^2 = -x(x-\alpha)(x-\beta) \geqq 0 \\ , 0 \leqq x \leqq \alpha \Longrightarrow x(x-2)^2 - kx^2 = x(x-\alpha)(x-\beta) \geqq 0 \end{cases}$$

ゆえに求める必要十分条件は

$$\int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha x(x-\alpha)(x-\beta)dx = -\int_\alpha^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)dx &\iff \int_0^\beta x(x-\alpha)(x-\beta)dx = 0 \\ &\iff \int_0^\beta x^2(x-\beta)dx - \alpha\int_0^\beta x(x-\beta)dx = 0 \\ &\iff -\frac{\beta^4}{12} + \frac{\alpha\beta^3}{6} = 0 \\ &\iff 2\alpha = \beta \qquad \cdots ③. \end{aligned}$$

$\alpha > 0$ に注意して①かつ ② を解くと

$$\alpha = \sqrt{2}, \beta = 2\sqrt{2}.$$

これを ① に代入すると, 求める k の条件

$$k = 3\sqrt{2} - 4$$

を得る。