1

原点を出発点として数直線上を動く点 P がある。試行 $(*)$ を次のように定める。

$(*)$
- 1枚の硬貨を1回投げて
- 表が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進める。
- 裏が出た場合は 1 個のさいころを 1 回投げ、
  奇数の目が出た場合は点 P を正の向きに 1 だけ進め、
  偶数の目が出た場合は点 P を負の向きに 2 だけ進める。

ただし、コインを投げたとき表裏の出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$、さいころを投げたとき 1 から 6 までの整数の目の出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 試行 $(*)$ を 3 回繰り返した後に、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。

(2) 試行 $(*)$ を 6 回繰り返した後に、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。

(3) n を 3 で割り切れない正の整数とする。試行 $(*)$ を n 回繰り返した後に、点 P が原点にもどっている確率を求めよ。

2

正の実数からなる 2 つの数列 $\{x_n\}, \{y_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 2, \quad y_1 = \frac{1}{2}, \quad x_{n+1} = (x_n)^5(y_n)^2, \quad y_{n+1} = x_n(y_n)^6$$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) k を実数とする。$a_n = \log_2 x_n$, $b_n = \log_2 y_n$ とおく。このとき、数列 $\{a_n + kb_n\}$ が等比数列になるような k の値をすべて求めよ。

(2) 数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

3

a を実数とし、関数 $f(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = x^4 + \frac{4a}{3}x^3 + (a+2)x^2$$

このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ が極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ が $x = 0$ で極大値をもつような a のとり得る値の範囲を求めよ。

4

n を正の整数、a を正の実数とし、関数 $f(x)$ と $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x) = n\log x, \quad g(x) = ax^n$$

また、曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が共有点をもち、その共有点における 2 つの曲線の接線が一致しているとする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ。

(3) (2) で求めた S_n に対し、極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。

5

S を xyz 空間内の原点 $\mathrm{O}(0,0,0)$ を中心とする半径 1 の球面とする。また、点 $\mathrm{P}(a,b,c)$ を点 $\mathrm{N}(0,0,1)$ とは異なる球面 S 上の点とする。点 P と点 N を通る直線 ℓ と xy 平面との交点を Q とおく。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q の座標を a, b, c を用いて表せ。

(2) xy 平面上の点 $(p,q,0)$ と点 N を通る直線を m とする。直線 m と球面 S の交点のうち、点 N 以外の交点の座標を p, q を用いて表せ。

(3) 点 $\left(0, 0, \dfrac{1}{2}\right)$ を通り、ベクトル $(3,4,5)$ に直交する平面 α を考える。点 P が平面 α と球面 S との交わりを動くとき、点 Q は xy 平面上の円周上を動くことを示せ。

6

1 辺の長さが 1 の正五角形を K とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) K の対角線の長さを求めよ。

(2) K の周で囲まれた図形を P とする。また、P を K の外接円の中心の周りに角 θ だけ回転して得られる図形を P_θ とする。P と P_θ の共通部分の周の長さを ℓ_θ とする。θ が $0^\circ < \theta < 72^\circ$ の範囲を動くとき、ℓ_θ の最小値が $2\sqrt{5}$ であることを示せ。