1

実数 b,c に対し，放物線 $y=f(x)=x^2+bx+c$ が 2 点 $(p,0),(q,0)$ を通ると仮定する（ただし $p<q$）．また，条件 $0<t\leqq 1$ を満たす実数 t に対し実数 r,s を次のように定める．

$$r=\frac{1+t}{2}p+\frac{1-t}{2}q, \quad s=\frac{1-t}{2}p+\frac{1+t}{2}q.$$

以下の問いに答えよ．

(1) $q-s, r-p, s+r, s-r$ のそれぞれを b,c,t を用いて表せ．

(2) sr および s^2+r^2 を b,c,t を用いて表せ．

(3) 放物線 $y=f(x)$，直線 $x=r$, $x=s$, および x 軸が囲む領域の面積を b,c,t を用いて表せ．

2

整数 a,b,c に対し次の条件を考える．

$$(*) \quad a\geqq b\geqq 0 \quad \text{かつ} \quad a^2-b^2=c$$

以下の問いに答えよ．

(1) $c=24,25,26$ それぞれの場合に条件 $(*)$ をみたす整数の組 (a,b) をすべて求めよ．

(2) p は 3 以上の素数，n は正の整数，$c=4p^{2n}$ とする．このとき，条件 $(*)$ をみたす整数の組 (a,b) をすべて求めよ．

3

コイン①, ..., ⑥が下図のようにマス目の中に置かれている．

①	②	③
④	⑤	⑥

これらのコインから無作為にひとつを選び，選んだコインはそのままにし，そのコインのあるマス目と辺を共有して隣接するマス目のコインを裏返す操作を考える．例えば，①を選べば，②, ④を裏返し，②を選べば，①, ③, ⑤を裏返す．最初はすべてのコインが表向きに置かれていたとする．正の整数 n に対し，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きである確率を p_n とするとき，以下の問いに答えよ．

(1) p_2 を求めよ．

(2) コイン①, ..., ⑥をグループ A, B に分けることによって，n 回目の操作終了時点ですべてのコインが裏向きであるための必要十分条件を次の形に表すことができる：

n 回目の操作終了時点までに A に属する各コインはそれぞれ奇数回選ばれ，B に属する各コインはそれぞれ偶数回選ばれる．

どのようにグループ分けすればよいかを答えよ．

(3) p_4 を求めよ．