九州大文系 1(2025)

2 つの曲線

$$y = x^3 + x^2 - x - 1, y = x^2$$

の両方に接するすべての直線の方程式を求めよ。

解答

$$(x^3 + x^2 - x - 1)' = 3x^2 + 2x - 1 \quad (x \in \mathbb{R})$$

だから, 曲線 $y = x^3 + x^2 - x - 1$ の点 $(t, t^3 + t^2 - t - 1)$ における接線の方程式は

$$y = (3t^2 + 2t - 1)(x - t) + t^3 + t^2 - t - 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

つまり

$$y = (3t^2 + 2t - 1)x - 2t^3 - t^2 - 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

これが, 曲線 $y = x^2$ に接する必要十分条件は, x の 2 次方程式

$$x^2 = (3t^2 + 2t - 1)x - 2t^3 - t^2 - 1$$

が重解をもつことである。これは, この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$D = 0$$

と言い換えられるから

$$(3t^2 + 2t - 1)^2 - 4(2t^3 + t^2 + 1) = 0,$$

つまり

$$(t - 1)(t + 1)(9t^2 + 4t + 3) = 0.$$

ここで, 任意の実数 t に対し, $9t^2 + 4t + 3 = 9\left(t + \frac{2}{9}\right)^2 + \frac{23}{9} > 0$ だから, この方程式の解は

$$t = \pm 1.$$

よって, 求める直線の方程式は

$$y = 4x - 4, y = 0.$$

九州大文系 2(2025)

半径 1 の円周 C 上の 2 点 A, B は $\mathrm{AB} = \sqrt{3}$ を満たすとする。点 P が円周 C 上を動くとき, $\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2$ の最大値を求めよ。

C を $\mathbb{R}^2$ 内の単位円とし, $\mathrm{A} = \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right), \mathrm{B} = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ としても一般性を失わない。このとき, 点 P は円周 C 上の点なので

$$\mathrm{P} = (\cos\theta, \sin\theta)$$

となる実数 θ が存在する。ゆえに

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2 &= \left(\cos\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sin\theta + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\cos\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\sin\theta + \frac{1}{2}\right)^2 \\ &= 2\sin\theta + 4.\end{aligned}$$

θ が実数全体を動くとき, $\sin\theta$ は閉区間 $-1 \leqq \sin\theta \leqq \theta$ を動くから

$$(\mathrm{AP}^2 + \mathrm{BP}^2\text{の最大値}) = 6.$$

九州大文系 3(2025)

(1)　n を整数とするとき, n^2 を 8 で割った余りは $0, 1, 4$ にいづれかであることを示せ。

(2)　$2^m = n^2 + 3$ を満たす 0 以上の整数の組 (m, n) をすべて求めよ。

(1)　任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, n = 4k \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n^2 = 16k^2 = 8 \cdot 2k^2 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, n = 4k \pm 1 \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n^2 = 16k^2 \pm 8k + 1 = 8(2k^2 \pm k) + 1 \\ \exists k \in \mathbb{Z}, n = 4k + 2 \Longrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 8(2k^2 + 2k) + 4 \end{cases}$$

$\therefore$　任意の $n \in \mathbb{Z}$ に対し, n^2を 8 で割った余りは $0, 1, 4$ のいづれかである。

(2)

$$2^m = n^2 + 3 \quad \cdots ①$$

[1]　$m = 0$ のとき

$$① \Longrightarrow n = \pm\sqrt{2}$$

だから, ①を満たす $n \in \mathbb{Z}$ は存在しない。

[2]　$m = 1$ のとき

$$① \Longrightarrow n = \pm i \quad (i : \text{虚数単位})$$

だから, ①を満たす $n \in \mathbb{Z}$ は存在しない。

[3]　$m = 2$ のとき

$$① \iff n = 1$$

[4]　$m \geqq 3$ のとき　このとき

$$① \Longrightarrow n^2 = 8(2^{m-3} - 1) + 5$$

だが, (1) によって, $n^2 = 8(2^{m-3} - 1) + 5$ となる n は存在しない ($m \geqq 3$ だから 2^{m-3} が整数であることに注意)。

[1], [2], [3], [4] より

$$(m, n) = (2, 1).$$

九州大文系 4(2025)

1 個のさいころを 3 回投げ, 出る目を順に a, b, c とする。整式

$$f(x) = (x^2 - ax + b)(x - c)$$

について, 以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x) = 0$ を満たす実数の個数が 1 個である確率を求めよ。

(2)　$f(x) = 0$ を満たす実数の個数が 3 個である確率を求めよ。

(1)　$x^2 - ax + b = 0$ の判別式を D とする。$D = a^2 - 4b$.

$$f(x) = 0 \text{ を満たす実数 } x \text{ の個数が 1 個} \iff \begin{cases} D = 0 \\ x^2 - ax + b = 0 \text{ が } x = c \text{ を重解としてもつ} \end{cases} \text{または}, D < 0.$$

[1]　$D = 0(\iff a^2 = 4b)$ のとき　このとき $4b$ が 4 の倍数なので, $a = 2, 4, 6$ でなければならない。

- $a = 2$ のとき $b = 1$ で, $x^2 - ax + b = 0$ の解は $x = 1$
- $a = 4$ のとき $b = 4$ で, $x^2 - ax + b = 0$ の解は $x = 2$
- $a = 6$ のとき $D = 0$ を満たす b は存在しない。

$$\{ (a, b) = (2, 1) \text{ のとき}, c = 1 (a, b) = (4, 4) \text{ のとき}, c = 2$$

が $f(x)$ が 3 重解をもつ必要十分条件だから, $f(x)$ が 3 重解をもつ確率は

$$\frac{2}{216}$$

[2]　$D < 0(\iff a^2 < 4b)$ のとき

- $a = 1$ のとき, $b = 1, 2, 3, 4, 5, 6$
- $a = 2$ のとき, $b = 2, 3, 4, 5, 6$
- $a = 3$ のとき, $b = 3, 4, 5, 6$
- $a = 4$ のとき, $b = 5, 6$
- $a = 5, 6$ のとき $D < 0$ を満たす b は存在しない。

したがって, $D < 0$ を満たす (a, b, c) の組み合わせの総数は $(6 + 5 + 4 + 2) \cdot 6$ 通り。$D < 0$ のとき $f(x) = 0$ の実数解がただ一つである確率は

$$\frac{(6 + 5 + 4 + 2) \cdot 6}{216} = \frac{102}{216}.$$

[1], [2] より求める確率は

$$\frac{2}{216} + \frac{102}{216} = \frac{13}{27}.$$

(2)

$$x^2-ax+b=0 \text{ が相異なる 2 つの自然数の解をもつ} \quad \cdots(*) \Longrightarrow D>0.$$

(1) で行った場合分けから, $D>0$ となるのは

$(a,b)=(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(4,3),(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6).$

$$(*) \Longrightarrow D=a^2-4b \text{ が平方数}.$$

そして

$$\begin{aligned}&3^2-4\cdot1=5, 4^2-4\cdot1=12, 4^2-4\cdot2=8, 5^2-4\cdot1=21, 5^2-4\cdot2=17, 5^2-4\cdot3=13,\\&5^2-4\cdot5=5, 6^2-4\cdot1=32, 6^2-4\cdot2=28, 6^2-4\cdot3=24, 6^2-4\cdot4=20, 6^2-4\cdot6=12\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (*) \Longrightarrow (a,b)=(3,2),(4,3),(5,4),(5,6),(6,5).$$

そして

$$\begin{aligned}&x^2-3x+2=(x-1)(x-2), x^2-4x+3=(x-3)(x-1), x^2-5x+4=(x-1)(x-4),\\&x^2-5x+6=(x-2)(x-3), x^2-6x+5=(x-1)(x-5).\end{aligned}$$

$$\therefore \quad (*) \iff (a,b)=(3,2),(4,3),(5,4),(5,6),(6,5).$$

$$f(x)=0 \text{ が相異なる 3 つの自然数の解をもつ} \iff (*) \text{ かつ}, c^2-ac+b\neq0$$

$x^2-ax+b=0$ が自然数の解を 2 つもつとき, $c^2-ac+b\neq0$ を満たすような c は 4 つだけ存在する。ゆえに求める確率は

$$\frac{4\cdot5}{6^3}=\frac{5}{54}.$$

ひとこと 各予備校の解答速報では $x^2-ax+b=0$ の解を α,β とおいて, $b=\alpha\beta$ を用いて場合分けしているが, (1) で, D の値によって (a,b) を分類したのでそれを使おうと思い, この解答にしました