一橋大学後期 1(2025)

以下の問いに答えよ。

(1)　整数 a, b, c が $a^2+b^2=c^2$ を満たすとき, ab は 4 の倍数であることを示せ。

(2)　3 辺の長さがすべて整数で、そのうちの 1 辺の長さが 2025 である直角三角形の面積は 162 の倍数であることを示せ。

解答

(1)　任意の整数 a, b, c に対し

$$a^2+b^2=c^2 \Longrightarrow ab \text{ は 4 の倍数}$$

が真であることをその対偶の任意の整数 a, b, c に対し

$$ab \text{ は 4 の倍数でない} \Longrightarrow a^2+b^2 \neq c^2$$

が真であることを示して証明する。a, b, c を整数とし, ab が 4 の倍数でないと仮定する。このとき

$$\begin{cases} a \equiv \pm 1 \pmod 4 \\ b \equiv \pm 1 \pmod 4 \end{cases} \text{または} \begin{cases} a \equiv 2 \pmod 4 \\ b \equiv \pm 1 \pmod 4 \end{cases} \text{または} \begin{cases} a \equiv \pm 1 \pmod 4 \\ b \equiv 2 \pmod 4 \end{cases}$$

[1]　$a \equiv \pm 1 \pmod 4$ かつ $b \equiv \pm 1 \pmod 4$ のとき

$$a^2+b^2 \equiv 2 \pmod 4$$

だが, $c \equiv 0, 1, 2, 3 \pmod 4$ の両辺を 2 乗すると

$$c^2 \equiv 0, 1 \pmod 4$$

だから

$$a^2+b^2 \neq c^2.$$

[2]　$a \equiv 2 \pmod 4$ かつ $b \equiv \pm 1 \pmod 4$ のとき

$$a^2+b^2=c^2$$

から

$$a^2=(c+b)(c-b).$$

a^2 は偶数だから $c+b, c-b$ の一方は偶数である。また $c+b=c-b+2b$ だから $c+b, c-b$ の偶奇は一致する。そして $b \equiv \pm 1 \pmod 4$ と $c+b=c-b+2b$ から少なくとも一方は 4 の倍数である。ゆえに a^2 は 8 の倍数である。一方

$$a=4k+2$$

となる整数 k が存在するから。

$$a^2 = 8(2k^2+2k)+4.$$

したがって, $a^2+b^2=c^2$ を満たす整数 a は存在しないから

$$a^2+b^2 \neq c^2.$$

[3]　$a \equiv \pm 1 \pmod 4$ かつ $b \equiv 2 \pmod 4$ のとき
これは, $a^2+b^2 \neq c^2$ と ab が a, b を入れ替えると同じ式になるので [2] と同様にして真。
[1], [2], [3] より, 対偶が真だから元の命題も真である。
(2)　直角三角形の 3 辺の長さを $a, b, c \in \mathbb{N}$ とし

$$a^2+b^2=c^2$$

が成り立つと仮定する。
[1]　$a=2025$ のとき

$$\frac{1}{2}ab \equiv 0 \pmod 2 \quad (\because ab \equiv 0 \pmod 4)$$

で, $a = 81 \cdot 25$ だから

$$\frac{1}{2}ab \equiv 0 \pmod{162} \quad (\because ab \equiv 0 \pmod 4).$$

[2]　$b=2025$ のとき　[1] と同様にして示される。
[3]　$c=2025$ のとき　ab は 4 の倍数なので

$$\frac{1}{2}ab \equiv 0 \pmod 2.$$

ゆえに, ab が 81 の倍数であることを示せばよい。ここで整数 x, y に対し

$$x^2+y^2 \equiv 0 \pmod 3 \Longrightarrow x \equiv y \equiv 0 \pmod 3 \quad \cdots (*) \text{（最後に示す）}$$

なので, $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$ で $2025 = 3^2 \cdot 225$ だから

$$\frac{a}{3} \equiv \frac{b}{3} \equiv 0 \pmod 3.$$

$$\therefore \quad a \equiv b \equiv 0 \pmod 9.$$

$$\therefore \quad ab \equiv 0 \pmod{81}.$$

[1], [2], [3] により, 示すべき命題が示された。
$(*)$ の証明　整数 n に対し

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod 3 \Longrightarrow n^2 \equiv 0 \pmod 3 \\ n \equiv \pm 1 \pmod 3 \Longrightarrow n^2 \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$$

だから整数 x, y, z に対し

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 3 \Longrightarrow x \equiv y \equiv 0 \pmod 3.$$

ひとこと　整数 x, y, z に対し

$$x^2 + y^2 \equiv 0 \pmod 3 \Longrightarrow x \equiv y \equiv 0 \pmod 3.$$

を自明にしてほしいですね笑

一橋大学後期 2(2025)

$f(x) = x^3$ とする。また k を実数とする。4 点 $(k-1, f(k-1)), (k+1, f(k-1)), (k+1, f(k+1)), (k+1, f(k+1))$ を頂点とする長方形の面積を S とし，この長方形の中で $y = f(x)$ のグラフの下側にある部分の面積を T とする。

$$m = \frac{T}{S}$$

の最大値と，そのときの k の値を求めよ。

解答

$$S = 2 \cdot (f(k+1) - f(k-1)) = 2(6k^2 + 2) = 4(3k^2 + 1).$$

$$\begin{aligned} T = \int_{k-1}^{k+1} (f(x) - f(k-1))dx &= \left[\frac{x^4}{4} - (k-1)^3 x\right]_{k-1}^{k+1} \\ &= \frac{(k+1)^4 - (k-1)^4}{4} - 2(k-1)^3 \\ &= 2k^3 + 2k - 2(k-1)^3 \\ &= 6k^2 - 4k + 2. \end{aligned}$$

だから

$$m = \frac{6k^2 - 4k + 2}{4(3k^2 + 1)} = \frac{3k^2 + 1 - 2k}{2(3k^2 + 1)} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{2 \cdot (-k)}{3k^2 + 1}\right)$$

$$\begin{cases} k \geqq 0 \Longrightarrow \dfrac{2 \cdot (-k)}{3k^2 + 1} \leqq 0 \\ k < 0 \Longrightarrow \dfrac{2 \cdot (-k)}{3k^2 + 1} > 0 \end{cases}$$

だから，m の最大値を調べるには $k < 0$ のときを調べればよい。$k < 0$ のとき，相加平均と相乗平均の大小関係を用いると

$$\frac{2 \cdot (-k)}{3k^2 + 1} = \frac{2}{-3k + \dfrac{1}{-k}} \leqq 2\frac{1}{\sqrt{-3k \cdot \left(\dfrac{1}{-k}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

等号が成り立つのは $-3k = \dfrac{1}{-k}$，つまり $k = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき。したがって，m の最小値は

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}$$

でそのときの k の値は $k = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

ひとこと　T を求めた際には，$k = 1$ の場合で検算するとよい。m は微分でも全然いけると思いますが，分数式なら相加相乗でいけないか一回は考えるとよいです。

一橋大学後期 3(2025)

平面上に $\triangle$OAB がある。辺 AB 上の点 M, N が

$$\angle\mathrm{AOM} = \angle\mathrm{MON} = \angle\mathrm{NOB} = \frac{1}{3}\angle\mathrm{AOB},$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} : \overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} : \overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 1:2:3$$

を満たすとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{ON}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

解答

(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

とおく。

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{ON}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

を整理すると

$$2 = s + 3t \quad \cdots ①$$

また, 直線 AN 上に点 M が存在するので

$$s + t = 1 \quad \cdots ②$$

①, ②から

$$s = t = \frac{1}{2}.$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{ON}}.$$

(2) $\angle\mathrm{AOM} = \angle\mathrm{MON} = \angle\mathrm{NOB} = \theta$ とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

だから, 点 M は線分 AN の中点である。また $\angle\mathrm{AOM} = \angle\mathrm{MON}$ でもあるから

$$\begin{cases} \angle\mathrm{ONB} = \dfrac{\pi}{2} & \cdots ③ \\ |\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = |\overrightarrow{\mathrm{ON}}|\cos\theta & \cdots ④ \end{cases}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} : \overrightarrow{\mathrm{ON}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2:3$$

だから

$$3|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|\cos 2\theta = 2|\overrightarrow{\mathrm{ON}}|\cos\theta.$$

ここで, ④より

$$3\cos\theta\cos 2\theta = 2\cos\theta.$$

$$\cos 2\theta = \frac{2}{3}.$$

さらに, ③より

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| : |\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = 1 : \cos 2\theta = 3:2.$$

そして, $\angle\mathrm{AOM} = \angle\mathrm{MON}$ より

$$|\overrightarrow{\mathrm{NB}}| : |\overrightarrow{\mathrm{NM}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}| : |\overrightarrow{\mathrm{OM}}| = 3:2.$$

また M が線分 AN の中点だったことから

$$|\overrightarrow{\mathrm{AN}}| : |\overrightarrow{\mathrm{NB}}| = 4:3$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{ON}} = \frac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OB}}.$$

一橋大学後期 4(2025)

数直線上の原点 0 に置かれた点 P に対し, 次のような試行を考える。
硬貨を投げて, 表が出れば P を $+1$ だけ移動させ, 裏が出れば P を -1 だけ移動させる, という操作を繰り返す。P が 3 または -2 に移動した移動したとき, もしくは P を移動させた回数が 7 回になったとき, 終了する。

(1) この試行において, P をちょうど 4 回移動させる確率を求めよ。

(2) この試行を終了したとき, P が 3 にある確率を求めよ。

(3) この試行において, P を 7 回移動させる確率を求めよ。

解答

表が出る回数を x 回, 裏が出る回数を y 回とする。また, n 回目の操作終了後 P がいる位置を X_n とする

(1) $x+y=4$ のとき, $x-y=4-2y$ だから $x-y=-2$ でなければならない。

$$\therefore \quad x=1, y=3.$$

したがって, ちょうど 4 回で P $=-2$ となる事象は

- $X_1=1, X_2=0, X_3=-1, X_4=-2$
- $X_1=-1, X_2=0, X_3=-1, X_4=-2$

の 2 つの互いに排反な事象の和集合である。よって, 求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4+\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8}$$

(2) $x-y=3$ のとき, $x+y=3+2y$ だから $x+y=3,5,7$ でなければならない。

[1] $x+y=3$ のときつまり

$$x=3, y=0.$$

このとき, $X_3=3$ となる確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3.$$

[2] $x+y=5$ のときつまり

$$x=4, y=1.$$

- $X_1=1, X_2=2, X_3=1, X_4=2, X_5=3$
- $X_1=1, X_2=0, X_3=1, X_4=2, X_5=3$
- $X_1=-1, X_2=0, X_3=1, X_4=2, X_5=3$

のどの 2 つの互いに排反な 3 つの事象の和事象が, $X_5 = 3$ である事象だから, その確率は

$$3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5.$$

[2]　$x + y = 7$ のときつまり

$$x = 5, y = 2.$$

- $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 1, X_6 = 2, X_7 = 3$
- $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 1, X_6 = 2, X_7 = 3$
- $X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 1, X_6 = 2, X_7 = 3$
- $X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 1, X_6 = 2, X_7 = 3$
- $X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = -1, X_4 = 0, X_5 = 1, X_6 = 2, X_7 = 3$
- $X_1 = -1, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 2, X_5 = 1, X_6 = 2, X_7 = 3$
- $X_1 = -1, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = 1, X_6 = 2, X_7 = 3$
- $X_1 = -1, X_2 = 0, X_3 = -1, X_4 = 0, X_5 = 1, X_6 = 2, X_7 = 3$

のどの 2 つの互いに排反な 8 つの事象の和事象が, $X_7 = 3$ である事象だから, その確率は

$$8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7.$$

[1], [2], [3] より求める確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5. + 6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{16 + 12 + 8}{2^7} = \frac{9}{32}.$$

(3)
[4]　ちょうど 2 回で P が操作を終了するとき　(1) や (2) のときと同様に考えて

$$x = 0, y = 2.$$

ゆえに, ちょうど 2 回で P が操作を終了する確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

[5]　ちょうど 6 回で P が操作を終了するとき　(1) や (2) のときと同様に考えて

$$x = 2, y = 4.$$

- $X_1 = 1, X_2 = 2, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = -1, X_6 = -2$
- $X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = -1, X_6 = -2$
- $X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = -1, X_4 = 0, X_5 = -1, X_6 = -2$
- $X_1 = -1, X_2 = 0, X_3 = 1, X_4 = 0, X_5 = -1, X_6 = -2$

- $X_1 = -1, X_2 = 0, X_3 = -1, X_4 = 0, X_5 = -1, X_6 = -2$

のどの 2 つの互いに排反な 5 つの事象の和事象が, ちょうど 6 回で P が操作を終了する事象だから, その確率は

$$5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6.$$

(1) と 1, [2], [4], [5] から P が 7 回移動しない確率は

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + 5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{43}{64}.$$

ゆえに求める確率は

$$1 - \frac{43}{64} = \frac{21}{64}.$$

ひとこと　本当は, 試行回数を横軸, P がいる座標を縦軸にの座標平面を考えて書き込むのがいいんですけど, 描画ツールの技術がないので愚直に数え上げました笑

一橋大学後期 5[(Ⅰ)](2025)

t を実数とし, 座標平面において

$$x^2+y^2-1-t(4x+2y-10)=0$$

で表される図形 C を考える。C が半径 1 以上 4 以下の円となるように t が動くとき, C が通過してできる領域を求め, 図示せよ。

解答

$$x^2+y^2-1-t(4x+2y-10)=0 \iff (x-2t)^2+(y-t)^2=5t^2-10t+1.$$

で

$$5t^2-10t+1>0 \iff t<\frac{5-2\sqrt{5}}{5}\text{ または}, \frac{5+2\sqrt{5}}{5}<t$$

だから, C 半径 1 以上で 4 以下になる t の必要十分条件は

$$\begin{cases} t<\dfrac{5-2\sqrt{5}}{5}\text{ または}, \dfrac{5+2\sqrt{5}}{5}<t \\ 5t^2-10t+1 \geqq 1^2 \\ 5t^2-10t+1 \leqq 4^2. \end{cases}$$

すなわち

$$-1 \leqq t \leqq 0 \text{ または}, 2 \leqq t \leqq 3.$$

また, 原点と直線 $4x+2y-10=0$ の距離は

$$\frac{|4\cdot 0+2\cdot 0-10|}{\sqrt{4^2+2^2}}=\sqrt{5}>1$$

だから

$$\begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ 4x+2y-10=0 \end{cases}$$

を満たす $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ は存在しない。ゆえに求める領域を $\mathcal{D}$ とすると, 任意の $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ に対し

$$\begin{aligned} (x,y)\in\mathcal{D} &\iff \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases} -1\leqq t\leqq 0 \\ x^2+y^2-1-t(4x+2y-10)=0 \end{cases} \text{ または}, \exists t\in\mathbb{R}, \begin{cases} 2\leqq t\leqq 3 \\ x^2+y^2-1-t(4x+2y-10)=0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-1}{4x+2y-10} \leqq 0 \\ \dfrac{x^2+y^2-1}{4x+2y-10} \geqq -1 \end{cases} \text{ または}, \begin{cases} \dfrac{x^2+y^2-1}{4x+2y-10} \leqq 3 \\ \dfrac{x^2+y^2-1}{4x+2y-10} \geqq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2-1}{4x+2y-10}\leqq 0\\[2mm] \dfrac{x^2+y^2-1}{4x+2y-10}\geqq -1\end{cases}\iff\begin{cases}x^2+y^2-1\leqq 0\\ x^2+y^2-1\geqq -(4x+2y-10)\\ 4x+2y-10>0\end{cases}\text{または,}\begin{cases}x^2+y^2-1\leqq 0\\ x^2+y^2-1\geqq 4X+2y-10\\ 4x+2y-10<0\end{cases}$$

$$\iff\begin{cases}x^2+y^2\leqq 1\\ (x+2)^2+(y+1)^2\geqq 16\\ 4x+2y-10>0\end{cases}\text{または,}\begin{cases}x^2+y^2\geqq 1\\ (x+2)^2+(y+1)^2\leqq 16\\ 4x+2y-10>0\end{cases}$$

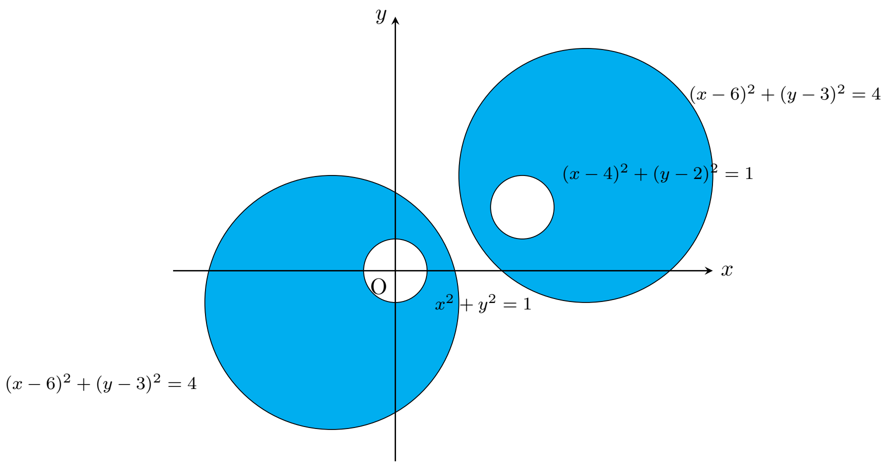
$$\iff\begin{cases}x^2+y^2\geqq 1\\ (x+2)^2+(y+1)^2\leqq 16\end{cases}\quad\text{（この部分は本来図示してからわかる）}$$

同様にして

$$\begin{cases}\dfrac{x^2+y^2-1}{4x+2y-10}\leqq 3\\[2mm] \dfrac{x^2+y^2-1}{4x+2y-10}\geqq 2\end{cases}\iff\begin{cases}(x-6)^2+(y-3)^2\leqq 16\\ (x-4)^2+(y-2)^2\geqq 1\end{cases}\quad\text{（この部分は本来図示してからわかる）}$$

$$\therefore\quad (x,y)\in\mathcal{D}\iff\begin{cases}x^2+y^2\geqq 1\\ (x+2)^2+(y+1)^2\leqq 16\end{cases}\text{または,}\begin{cases}(x-6)^2+(y-3)^2\leqq 16\\ (x-4)^2+(y-2)^2\geqq 1\end{cases}$$

よって, 求める領域を図示すると以下の水色部分（ただし境界線を含む）。



ひとこと　もっと幾何的にやったら簡単にできそうな気がしますが, 愚直にやるとこんなとこでしょう。

一橋大学後期 5[(II)](2025)

以下の問いに答えよ。

(1)　n を 0 以上の整数とし,

$$a_n = \int_0^1 \frac{t^{4n}}{t^2+1}dt$$

とする。$a_{n+1} - a_n$ を n で表せ。

(2)　正の整数 n に対し

$$0 < \pi - \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{(4k-3)(4k-1)} < \frac{1}{n}$$

が成り立つことを示せ。

解答

(1)

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \int_0^1 \frac{t^{4n}(t^2-1)(t^2+1)}{t^2+1}dt = \int_0^1 (t^{4n+2} - t^{4n})dt \\ &= \left[\frac{t^{4n+3}}{4n+3} - \frac{t^{4n+1}}{4n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+1} \\ &= -\frac{2}{(4n+3)(4n+1)}. \end{aligned}$$

(2)　n を正の整数とする。

$$\begin{aligned} a_n &= a_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\left(-\frac{2}{(4k+3)(4k+1)}\right) = a_0 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(4k-3)(4k-1)} \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{t^2+1} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(4k-3)(4k-1)} = \Big[\arctan x\Big]_0^1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(4k-3)(4k-1)} \\ &= \frac{\pi}{4} - \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{(4k-3)(4k-1)} \end{aligned}$$

だから

$$4a_n = \pi - \sum_{k=0}^{n} \frac{8}{(4k-3)(4k-1)} \quad \cdots ①.$$

また, 任意の $t \in [0,1]$ に対し

$$0 \leqq \frac{t^{4n}}{t^2+1} \leqq t^{4n-1}$$

が成り立ち, どの 2 つの不等式も恒等的に等しくないので

$$0 < a_n < \int_0^1 t^{4n-1}dt = \frac{1}{4n} \quad \cdots ②.$$

よって, ①と②より

$$0 < \pi - \sum_{k=1}^{n} \frac{8}{(4k-3)(4k-1)} < \frac{1}{n}.$$