ゴウカライズ

数学

2025

大学入試　解答速報

慶應義塾大学
看護医療学部

(2025年2月11日)

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

1

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化すると $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) 不等式

$$2(\log_3 x)^2 + 2\log_9 x > 1$$

を解くと $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3) さいころを 6 回続けて投げる。3 の倍数の目が出る回数が 2 になる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である。また、3 の倍数の目が出た回数が 2 であったとき、その 2 回が続けて起こる条件付き確率は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(4) 関数

$$y = (2\sin 2x + \sin x)\sin x \quad (0 \leqq x < 2\pi)$$

は $x = \boxed{\text{オ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

2

(1) $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$ の解で虚部が正であるものを ω としたとき、ω の絶対値は $|\omega| = \boxed{\text{キ}}$ であり、偏角 θ は $\theta = \boxed{\text{ク}}$ である。ただし、$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。また、

$$\omega^{10} = \boxed{\text{ケ}} + \boxed{\text{コ}}\,i$$

である。ただし、i は虚数単位とし、$\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ は実数とする。

(2) 平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}(\vec{b})$ に対して、ベクトル方程式

$$2|\vec{p} - \vec{a}| = |\vec{p} - \vec{b}|$$

を満たす点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ 全体の集合は円となる。この円の中心の位置ベクトルは $\boxed{\text{サ}}$ で半径は $\boxed{\text{シ}}$ となる。ただし、$\boxed{\text{シ}}$ では根号を用いない表記とすること。

(3) 自然数 n に対して、$3^n - 2n - 1$ が 4 の倍数であることの数学的帰納法を用いた証明を、解答欄 (3) に記述しなさい。

3

座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(-1,1,6)$, $\mathrm{B}(0,3,6)$, $\mathrm{C}(1,1,5)$ をとる。

このとき、$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \boxed{ス}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \boxed{セ}$ であり、$\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを θ とすると、$\sin\theta = \boxed{ソ}$ である。ただし、$0 < \theta < \pi$ とする。また、三角形 ABC の面積は $\boxed{タ}$ である。

さらに、3 点 A, B, C の定める平面 ABC に原点 O から垂線 OH を下ろすと、点 H の座標は $\boxed{チ}$ であり、四面体 OABC の体積は $\boxed{ツ}$ である。

4

k を実数の定数とし、座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,-3)$, $\mathrm{B}(-1,k)$ をとる。また、放物線 $y = x^2$ を C とする。以下に答えなさい。

(1) 点 A から曲線 C に引いた 2 本の接線のうち、傾きが正の接線を ℓ_1 とし、傾きが負の接線を ℓ_2 とするとき、直線 ℓ_1 の方程式は $y = \boxed{テ}$ であり、直線 ℓ_2 の方程式は $y = \boxed{ト}$ である。また、2 直線 ℓ_1, ℓ_2 のなす角を θ とすると、$\tan\theta = \boxed{ナ}$ である。ただし、$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。さらに、曲線 C と 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 で囲まれた図形の面積は $\boxed{ニ}$ である。

(2) 点 P が曲線 C 全体を動くときの $\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}$ の最小値を m とする。このとき、m を k を用いて表すと、$k \geqq \boxed{ヌ}$ のときは $m = \boxed{ネ}$ であり、$k < \boxed{ヌ}$ のときは $m = \boxed{ノ}$ である。

$\boxed{5}$

(1) 20 人の生徒に、5 点満点の小テストを行った。次の度数分布表は全員の小テストの得点である。

得点	度数（人）
0	1
1	2
2	5
3	4
4	6
5	2
計	20

この小テストの得点の平均値は $\boxed{\text{ハ}}$、分散は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。また、生徒のうちの 1 名の得点が $\boxed{\text{フ}}$ 点から $\boxed{\text{ヘ}}$ 点に変更された場合、生徒全員の得点の平均値は 3、分散は 2 となる。

(2) 確率変数 X と Y は独立であり、X の平均が m_x, 分散が v_x, Y の平均が m_y, 分散が v_y であるとする。また、a, b は定数とする。このとき、$aX + bY$ の平均は $\boxed{\text{ホ}}$、分散は $\boxed{\text{マ}}$ である。

(3) 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ は互いに独立であり、

$$T_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

の平均が m, 分散が v であるとする。X_{n+1} の平均が m', 分散が v' であるとき、

$$T_{n+1} = \frac{1}{n+1}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n + X_{n+1})$$

の平均は $\boxed{\text{ミ}}$、分散は $\boxed{\text{ム}}$ である。

$\boxed{1}$

(1) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}}$ の分母を有理化すると $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) 不等式

$$2(\log_3 x)^2 + 2\log_9 x > 1$$

を解くと $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3) さいころを 6 回続けて投げる。3 の倍数の目が出る回数が 2 になる確率は $\boxed{\text{ウ}}$ である。
また、3 の倍数の目が出た回数が 2 であったとき、その 2 回が続けて起こる条件付き確率は $\boxed{\text{エ}}$ である。

(4) 関数

$$y = (2\sin 2x + \sin x)\sin x \quad (0 \leqq x < 2\pi)$$

は $x = \boxed{\text{オ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{カ}}$ をとる。

$\boxed{1}$

(1) 和と差の積

$$\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{(\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{5+2\sqrt{6}-5} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}{2\sqrt{6}} = \frac{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}-\sqrt{30}}{12}$$ —(ア)

(2) $2(\log_3 x)^2 + 2\log_9 x > 1$

$\therefore\ 2(\log_3 x)^2 + \log_3 x - 1 > 0$

$\therefore\ (2\log_3 x - 1)(\log_3 x + 1) > 0$

$\therefore\ \log_3 x > \frac{1}{2}$ または $\log_3 x < -1$

$x > 0$ より、

$x > \sqrt{3}$ または $0 < x < \frac{1}{3}$ —(イ)

(3) サイコロで3の倍数が出る確率は $p = \frac{1}{3}$

よって 6回のうち2回 3の倍数がでる確率は、

$${}_6C_2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = 15 \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{16}{81} = \frac{80}{243}$$ —(ウ)

また、この下でこれが連続して出た確率は

6回中2回をえらぶ15通りのうち連続するのは5通りより、 $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ —(エ)

(4) $y = (2\sin 2x + \sin x)\sin x$

$= (4\sin x\cos x + \sin x)\sin x$

$= \sin^2 x(4\cos x + 1)$

$= (1-\cos^2 x)(4\cos x + 1)$

cosxでそろえる。

< $\cos x = t$ > とおく

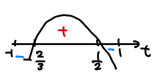
$= (1-t^2)(4t+1) = f(t)$ とする。$(-1 \leqq t \leqq 1)$

$f'(t) = 4(1-t^2) - 2t(4t+1)$

$= -12t^2 - 2t + 4$

$= -2(6t^2 + t - 2)$

$= -2(3t+2)(2t-1)$



より、$f(t)$ Max のコウホは $t = -1, \frac{1}{2}$ のいずれか.

$t = -1$ のとき $f(-1) = 0$

$t = \frac{1}{2}$ のとき $f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 \times \frac{3}{4} = \frac{9}{4}$ より このMaxは $\frac{9}{4}$ —(カ) で $t = \cos x = \frac{1}{2}$ より このとき $x = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi$ —(オ)

$\boxed{2}$

(1) $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = 0$ の解で虚部が正であるものを ω としたとき、ω の絶対値は $|\omega| = \boxed{キ}$ であり、偏角 θ は $\theta = \boxed{ク}$ である。ただし、$0 \leqq \theta < 2\pi$ とする。また、

$$\omega^{10} = \boxed{ケ} + \boxed{コ}\,i$$

である。ただし、i は虚数単位とし、$\boxed{ケ}$, $\boxed{コ}$ は実数とする。

(2) 平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a}), \mathrm{B}(\vec{b})$ に対して、ベクトル方程式

$$2|\vec{p} - \vec{a}| = |\vec{p} - \vec{b}|$$

を満たす点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ 全体の集合は円となる。この円の中心の位置ベクトルは $\boxed{サ}$ で半径は $\boxed{シ}$ となる。ただし、$\boxed{シ}$ では根号を用いない表記とすること。

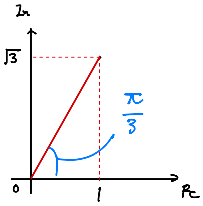
(3) 自然数 n に対して、$3^n - 2n - 1$ が 4 の倍数であることの数学的帰納法を用いた証明を、解答欄 (3) に記述しなさい。

$\boxed{2}$

(1) $x^3 - 3x^2 + 6x - 4 = 0 \quad \therefore (x-1)(x^2 - 2x + 4) = 0$　　$(x-1)^2 = -3 \quad \therefore x = 1 \pm \sqrt{3}i$

より、この3次方程式の解は、$x = 1$, $x = 1 \pm \sqrt{3}i$

よって虚部が正のものは、$\omega = 1 + \sqrt{3}i$ で $|\omega| = \sqrt{1+3} = 2$ ー(キ)



また、偏角は $\theta = \frac{\pi}{3}$ ー(ク)

$\omega = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ より、ド・モアブルの定理より、

$\omega^{10} = 2^{10}\left(\cos\frac{10}{3}\pi + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$

$= 1024\left(-\frac{1}{2} - i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -512 - 512\sqrt{3}i$ ー(ケ)(コ)

(2) $2|\vec{p} - \vec{a}| = |\vec{p} - \vec{b}|$

$\therefore 4|\vec{p} - \vec{a}|^2 = |\vec{p} - \vec{b}|^2$

$\therefore 4(\vec{p} - \vec{a})(\vec{p} - \vec{a}) = (\vec{p} - \vec{b})(\vec{p} - \vec{b})$

$\therefore 4(|\vec{p}|^2 - 2\vec{a}\vec{p} + |\vec{a}|^2) = |\vec{p}|^2 - 2\vec{b}\vec{p} + |\vec{b}|^2$

$\therefore 3|\vec{p}|^2 + (2\vec{b} - 8\vec{a})\vec{p} + 4|\vec{a}|^2 - |\vec{b}|^2 = 0$

$\therefore |\vec{p}|^2 + \left(\frac{2}{3}\vec{b} - \frac{8}{3}\vec{a}\right)\vec{p} + \frac{4}{3}|\vec{a}|^2 - \frac{1}{3}|\vec{b}|^2 = 0$

$\therefore \left(\vec{p} - \frac{1}{3}(4\vec{a} - \vec{b})\right)^2 = \frac{4}{9}\left(|\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2\right)$

$\therefore \left|\vec{p} - \frac{1}{3}(4\vec{a} - \vec{b})\right| = \frac{2}{3}|\vec{a} - \vec{b}|$

結局 $|\vec{p} - \vec{\bigcirc}| = |\vec{\square}|$ のような形をつくるために平方完成する!

以上より、中心の位置ベクトルは $\frac{1}{3}(4\vec{a} - \vec{b})$ ー(サ)　半径は $\frac{2}{3}|\vec{a} - \vec{b}|$ ー(シ)

(3) 数学的帰納法で示す。

(I) $n = 1$ のとき、$3^1 - 2\cdot 1 - 1 = 0$ であり、0は4の倍数であるため、適する。

(II) $n = k$ で命題が成立するとき、

$3^k - 2k - 1 = 4m \quad (m \in \mathbb{Z})$ とできる。　式の形を利用する。

ここで $3^{k+1} - 2(k+1) - 1 = 3\cdot 3^k - 2k - 1 - 2$

$= (3^k - 2k - 1) + 2(3^k - 1)$

$= 4m + 2(3^k - 1)$

3^k は奇数より、$3^k - 1$ は偶数であるので、$2(3^k - 1)$ は4の倍数である。

よって $3^{k+1} - 2(k+1) - 1$ も4の倍数であり、$(k+1)$ のときも成立する。

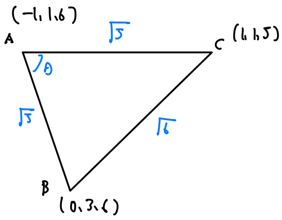
以上より、全ての $n\ (\in \mathbb{N})$ で $3^n - 2n - 1$ は4の倍数である。 ☒

$\boxed{3}$

座標空間内に 3 点 A$(-1,1,6)$, B$(0,3,6)$, C$(1,1,5)$ をとる。

このとき、$\left|\overrightarrow{AB}\right| =$ $\boxed{ス}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} =$ $\boxed{セ}$ であり、$\angle$BAC の大きさを θ とすると、$\sin\theta =$ $\boxed{ソ}$ である。ただし、$0<\theta<\pi$ とする。また、三角形 ABC の面積は $\boxed{タ}$ である。

さらに、3 点 A, B, C の定める平面 ABC に原点 O から垂線 OH を下ろすと、点 H の座標は $\boxed{チ}$ であり、四面体 OABC の体積は $\boxed{ツ}$ である。



3

$\overrightarrow{AB}=(1,2,0)$ より $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1^2+2^2+0^2}=\sqrt{5}$ —(ス)

$\overrightarrow{AC}=(2,0,-1)$ より、$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot2+2\cdot0+0\cdot(-1)=2$ —(セ)

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{5}$, $\overrightarrow{BC}=(1,-2,-1)$ より $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{6}$ なので、

余弦定理より、

$\cos\theta=\dfrac{(\sqrt5)^2+(\sqrt5)^2-(\sqrt6)^2}{2\cdot\sqrt5\cdot\sqrt5}=\dfrac{2}{5}$ よって $0<\theta<\pi$ より $\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\dfrac{\sqrt{21}}{5}$ —(ソ)

また $\triangle ABC=\frac12\cdot AB\cdot AC\cdot\sin\theta=\frac12\cdot\sqrt5\cdot\sqrt5\cdot\frac{\sqrt{21}}{5}=\dfrac{\sqrt{21}}{2}$ —(タ)

Oから、ABCに垂線OHを下ろしたときを考える。まず、平面ABCの方程式について、$\vec{n}(-2,1,-4)$ は ABCと垂直なベクトルであるから、平面上の点を $P(x,y,z)$ とすると

$\overrightarrow{AP}\perp\vec{n}$ ∴ $\overrightarrow{AP}\cdot\vec{n}=0$ より

$$\begin{pmatrix}x+1\\y-1\\z-6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\-4\end{pmatrix}=0 \quad \therefore -2(x+1)+(y-1)-4(z-6)=0$$

$\overrightarrow{OH}\parallel\vec{n}$

∴ $-2x+y-4z+21=0$ —(*)

また、$H(-2k,k,-4k)$ とできて、これが(*)上にあるので、

$-2(-2k)+k-4(-4k)+21=0$

∴ $21k+21=0$ ∴ $k=-1$ より $H(2,-1,4)$ —(チ)

また、$|\overrightarrow{OH}|=\sqrt{2^2+1+4^2}=\sqrt{21}$ より、$V_{OABC}=\triangle ABC\times|\overrightarrow{OH}|\times\frac13$ より、

$=\dfrac{\sqrt{21}}{2}\times\sqrt{21}\times\dfrac13=\dfrac{7}{2}$ —(ツ)

$\boxed{4}$

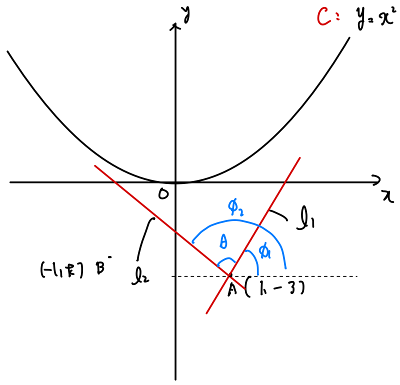
k を実数の定数とし、座標平面上に 2 点 A$(1, -3)$, B$(-1, k)$ をとる。また、放物線 $y = x^2$ を C とする。以下に答えなさい。

(1) 点 A から曲線 C に引いた 2 本の接線のうち、傾きが正の接線を ℓ_1 とし、傾きが負の接線を ℓ_2 とするとき、直線 ℓ_1 の方程式は $y =$ $\boxed{テ}$ であり、直線 ℓ_2 の方程式は $y =$ $\boxed{ト}$ である。また、2 直線 ℓ_1, ℓ_2 のなす角を θ とすると、$\tan\theta =$ $\boxed{ナ}$ である。ただし、$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。さらに、曲線 C と 2 直線 ℓ_1, ℓ_2 で囲まれた図形の面積は $\boxed{ニ}$ である。

(2) 点 P が曲線 C 全体を動くときの $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB}$ の最小値を m とする。このとき、m を k を用いて表すと、$k \geqq$ $\boxed{ヌ}$ のときは $m =$ $\boxed{ネ}$ であり、$k <$ $\boxed{ヌ}$ のときは $m =$ $\boxed{ノ}$ である。

$\boxed{4}$

(1)



まず、$y' = 2x$ であり、$x = t$ における C の接線が A を通るとき、これらは l_1, l_2 である。

この方程式は

$y = 2t(x-t) + t^2 = 2tx - t^2$

Cを軸に考える.

これが、A$(1, -3)$ を通るので、

$-3 = 2t - t^2$ $\therefore$ $t^2 - 2t - 3 = 0$

$\therefore$ $(t-3)(t+1) = 0$ $\therefore$ $t = -1, 3$.

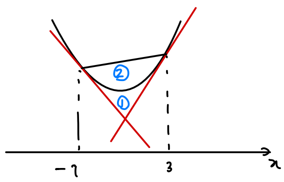
よって 2つの接線は $\begin{cases} y = 6x - 9 & \text{―(テ)} \\ y = -2x - 1 & \text{―(ト)} \end{cases}$

$\tan\phi =$ 傾き.

また、2直線のなす角 θ について.

$$\tan\theta = \tan(\phi_2 - \phi_1) = \frac{\tan\phi_2 - \tan\phi_1}{1 + \tan\phi_2 \tan\phi_1} = \frac{-2-6}{1+(-2)\cdot 6} = \frac{-8}{-11} = \frac{8}{11} \text{ ―(ナ)}$$

l_1, l_2, C で囲まれた面積は、下図より、$S = \frac{1}{12}(3+1)^3 = \frac{1}{12} \times 64 = \frac{16}{3}$ ―(ニ)



(2) P(p, p^2) $(p \in \mathbb{R})$ とする。このとき $\overrightarrow{PA} = (1-p, -3-p^2)$ $\overrightarrow{PB} = (-1-p, k-p^2)$ であり、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} &= (1-p)(-1-p) + (-3-p^2)(k-p^2) \\ &= p^2 - 1 - 3k + 3p^2 - kp^2 + p^4 \\ &= p^4 + (4-k)p^2 - 1 - 3k \\ &= \left\{p^2 + \left(2 - \frac{k}{2}\right)\right\}^2 - \left(2 - \frac{k}{2}\right)^2 - 1 - 3k \\ &= \left\{p^2 - \left(\frac{k}{2} - 2\right)\right\}^2 - \frac{1}{4}k^2 - k - 5 \end{aligned}$$

$-\left(4 - 2k + \frac{k^2}{4}\right) - 1 - 3k$

ここで $p^2 \geqq 0$ であることに注意する。

① $\frac{k}{2} - 2 \geqq 0$ $\therefore$ $k \geqq 4$ のとき、$p^2 = \frac{k}{2} - 2$ で最小 $-\frac{1}{4}k^2 - k - 5$ ―(ネ) をとる。

―(ヌ)

② $\frac{k}{2} - 2 < 0$ $\therefore$ $k < 4$ のとき $p^2 = 0$ で最小 $-1 - 3k$ ―(ノ) をとる。

$\boxed{5}$

(1) 20 人の生徒に、5 点満点の小テストを行った。次の度数分布表は全員の小テストの得点である。

得点	度数（人）
0	1
1	2
2	5
3	4
4	6
5	2
計	20

この小テストの得点の平均値は $\boxed{\text{ハ}}$、分散は $\boxed{\text{ヒ}}$ である。また、生徒のうちの 1 名の得点が $\boxed{\text{フ}}$ 点から $\boxed{\text{ヘ}}$ 点に変更された場合、生徒全員の得点の平均値は 3、分散は 2 となる。

(2) 確率変数 X と Y は独立であり、X の平均が m_x, 分散が v_x, Y の平均が m_y, 分散が v_y であるとする。また、a, b は定数とする。このとき、$aX + bY$ の平均は $\boxed{\text{ホ}}$、分散は $\boxed{\text{マ}}$ である。

(3) 確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n, X_{n+1}$ は互いに独立であり、

$$T_n = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n)$$

の平均が m, 分散が v であるとする。X_{n+1} の平均が m', 分散が v' であるとき、

$$T_{n+1} = \frac{1}{n+1}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n + X_{n+1})$$

の平均は $\boxed{\text{ミ}}$、分散は $\boxed{\text{ム}}$ である。

$\boxed{5}$

(1) 平均は $\frac{1}{20}(0\times1+1\times2+2\times5+3\times4+4\times6+5\times2) = \underline{2.9}$ —(ハ)

2乗平均は $\frac{1}{20}(0\times1+1^2\times2+2^2\times5+3^2\times4+4^2\times6+5^2\times2) = 10.2$

(分散) = (二乗平均) − (平均)^2

より 分散 = $10.2-(2.9)^2 = 10.2-8.41 = \underline{1.79}$ —(ヒ)

点数変更により 平均 3、分散 2 となるので
全員の点数の合計は 60点 (元は 58点)
全員の点数の2乗の合計は 220点となる. (元は 204点)

点数が2点あがり
点数の2乗の差が16点より、

よって $\underline{3点}$の人が $\underline{5点}$にあがった場合である.
—(フヘ)

定義より、

(2) $\overline{aX+bY} = am_x + \underline{bm_y}$ —(ホ)　この分散は. $a^2V_x + \underline{b^2V_y}$ —(マ)

(3) T_{n+1} の平均は $E(T_{n+1}) = \frac{n}{n+1}E(T_n) + \frac{1}{n+1}E(X_n) = \underline{\frac{nm+m'}{n+1}}$ とできる. —(ミ)

分散について、
$V(T_{n+1}) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 V(T_n) + \left(\frac{1}{n+1}\right)^2 V(X_{n+1}) = \underline{\frac{n^2v + v'^2}{(n+1)^2}}$ —(ム)