ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

慶應義塾大学

理工学部

2025年2月12日

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

1

(1) 複素数平面上で、方程式 $|z+i| = 2|z-\sqrt{3}|$ を満たす点 z 全体が表す図形は、中心が $\boxed{ア}$、半径が $\boxed{イ}$ の円である。

(2) n を自然数とする。1 から n までの自然数の中で 6 または 8 または 9 で割り切れるものの個数を a_n で表す。このとき、$a_{30} = \boxed{ウ}$ となる。また、$a_n = 1000$ を満たす最大の n は $\boxed{エ}$ である。

(3) $f(x)$ を微分可能な関数とし、$g(x) = x^3 + x$ とする。関数 $g(x)$ は微分可能な逆関数 $g^{-1}(x)$ をもつ。定数 t に対して、関数 $t^2x^2 - f(g^{-1}(x))$ は $x = t^3 + t$ で極値をとるとする。このとき、$f'(t)$ を t の多項式で表すと $f'(t) = \boxed{オ}$ となる。次に、任意の定数 t に対して、関数 $t^2x^2 - f(g^{-1}(x))$ は $x = t^3 + t$ で極値をとるとする。このとき、$f(0) = -2$ ならば $f(1) = \boxed{カ}$ である。

2

座標平面上の点 P$(1,1)$ と点 Q$(1,-1)$ および曲線

$$C : y = \frac{1}{x-4} \quad (x > 4)$$

を考える。

(1) 曲線 C の接線で点 Q を通るものは存在しないことを証明しなさい。

(2) 曲線 C の接線で点 P を通るものを l とし、C との接点を A とする。このとき、l の方程式は $y = \boxed{キ}$ であり、点 A の座標は $\boxed{ク}$ である。また、曲線 C 上の点 B が

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PA}} + \overrightarrow{\mathrm{PA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AQ}} = -\frac{2}{3}$$

を満たすとき、点 B の座標は $\boxed{ケ}$ である。

(3) A, B を (2) で定めた点とする。正の数 t に対し、曲線 C 上の点 $\mathrm{R}\left(t+4, \dfrac{1}{t}\right)$ は点 A と異なるものとする。線分 AR を $2:1$ に内分する点を S とし、線分 BS を $3:2$ に内分する点を T(u, v) とするとき、u を t の式で表すと $u = \boxed{コ}$ である。また、uv の値は $t = \boxed{サ}$ のとき最小となる。

3

点 P, Q を数直線の原点におき、1 個のさいころを投げて出た目に応じて P, Q を動かす。偶数の目が出たときは P を正の向きに 1 だけ動かし、5 または 6 の目が出たときは Q を正の向きに 1 だけ動かす。たとえば、6 の目が出たときには、P, Q をともに正の向きに 1 だけ動かす。P と Q の距離が初めて 2 となるまでさいころを投げ続けることとし、P, Q の距離が 2 となったら、それ以降はさいころを投げない。n 回さいころを投げて P, Q の距離が 2 となる確率を p_n とする。

(1) $p_2 = \boxed{\text{シ}}$ である。

(2) n 回さいころを投げて、P が Q よりも正の向きに 1 だけ進んでいる確率を x_n, P, Q が同じ位置にある確率を y_n, Q が P よりも正の向きに 1 だけ進んでいる確率を z_n とすると、

$$y_{n+1} = \boxed{\text{ス}}\,x_n + \boxed{\text{セ}}\,y_n + \boxed{\text{ソ}}\,z_n$$

という関係式が成立する。また、$x_n = \boxed{\text{タ}}\,z_n$ が成立する。ただし、$\boxed{\text{ス}} \sim \boxed{\text{タ}}$ には数を記入すること。

(3) 関係式

$$z_{n+1} + \alpha y_{n+1} = \beta(z_n + \alpha y_n)$$

を満たす定数の組 (α, β) は、$\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ の 2 組ある。

(4) p_n を n を用いて表すと $p_n = \boxed{\text{ナ}}$ となる。

4

以下の設問では、区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x), g(x), h(x)$ に対して、区間 $[a,b]$ で $f(x) \leqq g(x)$ ならば $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$ であること、および $\displaystyle\left|\int_a^b h(x)dx\right| \leqq \int_a^b |h(x)|\,dx$ であることをことわりなしに用いてよい。

(1) 自然数 n に対して $\displaystyle I_n = \int_1^n \left(\frac{1}{x}\right)^{3/2} dx$ とする。このとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = \boxed{\text{ト}}$ である。

(2) 自然数 n に対して $\displaystyle S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^{3/2}$ とする。すべての n に対して不等式

$$S_n < 1 + \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

を証明しなさい。

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos 5x dx = -\boxed{\text{ナ}}$ である。

(4) k を自然数とするとき、$\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin kx|dx = \boxed{\text{ニ}}$ である。

(5) $f(x)$ を微分可能な関数とし、M を正の定数とする。区間 $[0, 2\pi]$ で、$f'(x)$ は連続かつ $|f'(x)| \leqq M$ と仮定する。自然数 k, n に対して、$\displaystyle a_k = \int_0^{2\pi} f(x)\cos kx dx$ とし、$\displaystyle T_n = \sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{3}{2}}$ とする。このとき、すべての n に対して不等式

$$T_n < 23M^{\frac{3}{2}}$$

を証明しなさい。ただし、必要であれば (2) の不等式と (4) の等式を証明なしに用いてよい。

$\boxed{5}$

座標平面上に 3 点 $A(x, 0)$, $B(x, y)$, $C(0, y)$ をとる。ただし、B は単位円周上を動き、$x > 0$, $y > 0$ である。このとき、線分 AB と BC の長さが等しくなる x の値は $x = \boxed{ヌ}$ である。

次に、n を 2 以上の整数とし、$k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $x = \dfrac{k}{n}$ のときの線分 AB と BC の短い方の長さを $L_n(k)$ と表す。$n = 4$ とすると、$L_4(k)$ $(k = 1, 2, 3)$ の最大値は $\boxed{ネ}$ である。一方、$n = 5$ のとき $L_5(k)$ が最大となる k の値は $\boxed{ノ}$ と $\boxed{ハ}$ の 2 個ある。同様に、2 以上の整数 a で、$L_a(k)$ が最大となる k の値が 2 個あるものを考え、そのような k のうち大きい方の値を m とおく。このとき、m を a の式で表すと $m = \boxed{ヒ}$ となる。また、$b = 3a + 4m - 2$ とおいたとき、$L_b(k)$ が最大となる k の値も 2 個あり、それらの大きい方を a と m の 1 次式で表すと $\boxed{フ}$ となる。

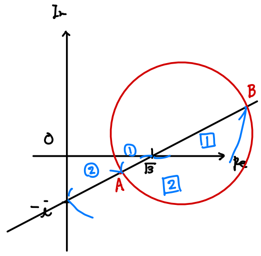
1

(1) 複素数平面上で、方程式 $|z+i| = 2|z-\sqrt{3}|$ を満たす点 z 全体が表す図形は、中心が $\boxed{\text{ア}}$、半径が $\boxed{\text{イ}}$ の円である。

(2) n を自然数とする。1 から n までの自然数の中で 6 または 8 または 9 で割り切れるものの個数を a_n で表す。このとき、$a_{30} = \boxed{\text{ウ}}$ となる。また、$a_n = 1000$ を満たす最大の n は $\boxed{\text{エ}}$ である。

1

$|z+i| = 2|z-\sqrt{3}|$ は下図のように、$\sqrt{3}$ と $-i$ を 1:2 に内分する点と外分する点を結んだ線分を直径とする円であるので、



$A\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}-\frac{1}{3}i\right)$　$B\left(2\sqrt{3}+i\right)$ の中点 $\frac{4}{3}\sqrt{3}+\frac{1}{3}i$ が中心で 半径は $\frac{4}{3}$

(2) 6でわれる数の集合を A
8　〃　B
9　〃　C　とする。

ここで $\boxed{n(A\cup B\cup C) = n(A)+n(B)+n(C) - \underset{24\text{でわれる}}{n(A\cap B)} - \underset{18\text{でわれる}}{n(A\cap C)} - \underset{72\text{でわれる}}{n(B\cap C)} + \underset{72\text{でわれる}}{n(A\cap B\cap C)}}$ であり

a_{30}，つまり 1～30 が全体集合のとき．

$n(A) = \left[\frac{30}{6}\right] = 5$　　$n(A\cap B) = \left[\frac{30}{24}\right] = 1$

$n(B) = \left[\frac{30}{8}\right] = 3$　　$n(A\cap C) = \left[\frac{30}{18}\right] = 1$

$n(C) = \left[\frac{30}{9}\right] = 3$　　$n(B\cap C) = n(A\cap B\cap C)$ より

$a_{30} = 5+3+3-1-1 = 9$

また．$a_n = 1000$ なる最大の n について．まず．a_n は

$a_n = \left[\frac{n}{6}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]+\left[\frac{n}{9}\right]-\left[\frac{n}{24}\right]-\left[\frac{n}{18}\right]$ －(＊) であり、一般に $p-1 < [p] \leqq p$ が成立するので、

$a_n = 1000 > \left(\frac{n}{6}-1\right)+\left(\frac{n}{8}-1\right)+\left(\frac{n}{9}-1\right)-\frac{n}{24}-\frac{n}{18} = -3+\frac{11}{36}n$ －①

$a_n = 1000 < \frac{n}{6}+\frac{n}{8}+\frac{n}{9}-\left(\frac{n}{24}-1\right)-\left(\frac{n}{18}-1\right) = 2+\frac{11}{36}n$ －②

が必要である．

①②をといて．

①：$n < 3282.5\cdots$

②：$n > 3266.1\cdots$　より．$3267 \leqq n \leqq 3282$ であることが $a_n = 1000$ であるために必要である．

後は最大をみつけるだけなので二分探索がはやい、

$n = 3275$ のとき．(＊)より．

$a_{3275} = 545+409+363-136-181 = 1000$

$n = 3276$ のとき、(＊)より、

$a_{3276} = 546+409+364-182-136 = 1001$　より n の Max は $n = 3275$

(3) $f(x)$ を微分可能な関数とし、$g(x)=x^3+x$ とする。関数 $g(x)$ は微分可能な逆関数 $g^{-1}(x)$ をもつ。定数 t に対して、関数 $t^2x^2-f(g^{-1}(x))$ は $x=t^3+t$ で極値をとるとする。このとき、$f'(t)$ を t の多項式で表すと $f'(t)=$ $\boxed{\text{オ}}$ となる。次に、任意の定数 t に対して、関数 $t^2x^2-f(g^{-1}(x))$ は $x=t^3+t$ で極値をとるとする。このとき、$f(0)=-2$ ならば $f(1)=$ $\boxed{\text{カ}}$ である。

(3) $H(x)=t^2x^2-f(g^{-1}(x))$ とする.

$H'(x)=2t^2x-f'(g^{-1}(x))\{g^{-1}(x)\}'$ であり、$g^{-1}(g(x))=x$,

$x=g^{-1}(x)^3+g^{-1}(x)$ $\therefore$ $1=3g^{-1}(x)^2\{g^{-1}(x)\}'+\{g^{-1}(x)\}'$ $\therefore \{g^{-1}(x)\}'=\dfrac{1}{3\{g^{-1}(x)\}^2+1}$ より.

$$H'(x)=2t^2x-f'(g^{-1}(x))\cdot\frac{1}{3\{g^{-1}(x)\}^2+1}$$

$\therefore H'(t^3+t)=0=2t^2(t^3+t)-f'(t)\cdot\dfrac{1}{3t^2+1}$ $\therefore$ $f'(t)=2t^3(t^2+1)(3t^2+1)$ ― ①

全ての t で ① がなりたつので

$f(0)=-2$

$f'(x)=6x^7+8x^5+2x^3$ より. $f(x)=\dfrac{3}{4}x^8+\dfrac{4}{3}x^6+\dfrac{1}{2}x^4-2$ より $f(1)=\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{3}+\dfrac{1}{2}-2=\dfrac{7}{12}$

$\boxed{2}$

座標平面上の点 P$(1, 1)$ と点 Q$(1, -1)$ および曲線

$$C : y = \frac{1}{x-4} \quad (x > 4)$$

を考える。

(1) 曲線 C の接線で点 Q を通るものは存在しないことを証明しなさい。

(2) 曲線 C の接線で点 P を通るものを l とし、C との接点を A とする。このとき、l の方程式は $y = \boxed{キ}$ であり、点 A の座標は $\boxed{ク}$ である。また、曲線 C 上の点 B が

$$\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{AQ} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AQ} = -\frac{2}{3}$$

を満たすとき、点 B の座標は $\boxed{ケ}$ である。

$\boxed{2}$

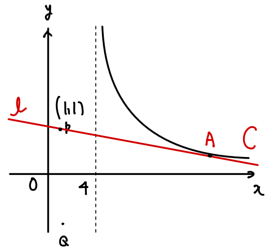
(1) $y' = -\frac{1}{(x-4)^2}$ であり、$x=t$ における C の接線は $y = -\frac{1}{(t-4)^2}(x-t) + \frac{1}{t-4}$ であり、

これが $(1, -1)$ を通るとき、

$-1 = -\frac{1}{(t-4)^2}(1-t) + \frac{1}{t-4}$ ∴ $-(t-4)^2 = -(1-t) + (t-4)$ ∴ $t^2 - 6t + 11 = 0$ となるが、

$(t-3)^2 + 2 > 0$ より、これを満たす $t \in \mathbb{R}$ は存在せず、C の接線で Q を通るものは存在しない。■

(2)



A の座標を $\left(a, \frac{1}{a-4}\right)$ $(a>4)$ とすると、

l: $y = -\frac{1}{(a-4)^2}(x-a) + \frac{1}{a-4}$ であり、これが P$(1,1)$ を通るので、

$1 = -\frac{1}{(a-4)^2}(1-a) + \frac{1}{a-4}$ ∴ $(a-4)^2 = -(1-a) + (a-4)$

∴ $a^2 - 10a + 21 = 0$ ∴ $(a-7)(a-3) = 0$ ∴ $a = 7$ (>4)

より、l の方程式は $y = -\frac{1}{9}x + \frac{10}{9}$ であり A$\left(7, \frac{1}{3}\right)$

また B$\left(b, \frac{1}{b-4}\right)$ $(b>4)$ とすると、

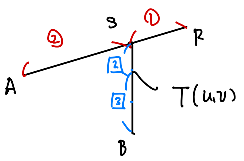
$\overrightarrow{PB} = \left(b-1, \frac{1}{b-4} - 1\right)$ $\overrightarrow{PA} = \left(6, -\frac{2}{3}\right)$ $\overrightarrow{AQ} = \left(-6, -\frac{4}{3}\right)$ $\overrightarrow{AB} = \left(b-7, \frac{1}{b-4} - \frac{1}{3}\right)$ より

(与式) $= (b-1)\cdot 6 + \left(\frac{1}{b-4} - 1\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + 6\cdot(-6) + \left(-\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{4}{3}\right) + (b-7)(-6) + \left(\frac{1}{b-4} - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{4}{3}\right) = -\frac{2}{3}$

∴ $b = \frac{19}{4}$ より、B$\left(\frac{19}{4}, \frac{4}{3}\right)$

(3) A, B を (2) で定めた点とする。正の数 t に対し、曲線 C 上の点 $\mathrm{R}\left(t+4, \dfrac{1}{t}\right)$ は点 A と異なるものとする。線分 AR を $2:1$ に内分する点を S とし、線分 BS を $3:2$ に内分する点を $\mathrm{T}(u, v)$ とするとき、u を t の式で表すと $u=$ $\boxed{コ}$ である。また、uv の値は $t=$ $\boxed{サ}$ のとき最小となる。

(3) $\mathrm{A}\left(7, \frac{1}{3}\right)$ $\mathrm{B}\left(\frac{19}{4}, \frac{4}{3}\right)$ $\mathrm{R}\left(t+4, \frac{1}{t}\right)$ より



$$\mathrm{S}\left(\frac{7}{3}+\frac{2}{3}(t+4), \ \frac{1}{9}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{t}\right)=\left(\frac{2}{3}t+5, \ \frac{2}{3t}+\frac{1}{9}\right)$$

$$\mathrm{T}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}=\frac{3}{5}\begin{pmatrix} \frac{2}{3}t+5 \\ \frac{2}{3t}+\frac{1}{9} \end{pmatrix}+\frac{2}{5}\begin{pmatrix} \frac{19}{4} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{4t+49}{10} \\ \frac{2+3t}{5t} \end{pmatrix}$$

$$uv=\left(\frac{4t+49}{10}\right)\times\left(\frac{2+3t}{5t}\right)$$

相加相乗

$$=\frac{8t+12t^2+98+147t}{50t}=\frac{12t^2+155t+98}{50t}=\frac{1}{50}\boxed{\left(12t+\frac{98}{t}\right)}+\frac{31}{10}\geqq\frac{31}{10}+\frac{2}{50}\sqrt{12t\cdot\frac{98}{t}}=\frac{31}{10}+\frac{1}{25}\sqrt{12\cdot 98}$$

最小となるときは、$12t=\frac{98}{t}$ ∴ $t^2=\frac{49}{6}$ ∴ $t=\frac{7}{6}\sqrt{6}$ をみたす。

(3) 関係式

$$z_{n+1} + \alpha y_{n+1} = \beta(z_n + \alpha y_n)$$

を満たす定数の組 (α, β) は、$\boxed{\text{チ}}$ と $\boxed{\text{ツ}}$ の 2 組ある。

(4) p_n を n を用いて表すと $p_n = \boxed{\text{ナ}}$ となる。

(3) $z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{6}y_n$ ― ③

$y_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{3}z_n = \frac{2}{3}z_n + \frac{1}{2}y_n$ ― ④ より.

$$z_{n+1} + \alpha y_{n+1} = \beta(z_n + \alpha y_n) = \left(\frac{1}{2}z_n + \frac{1}{6}y_n\right) + \alpha\left(\frac{2}{3}z_n + \frac{1}{2}y_n\right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\alpha\right)z_n + \left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha}{2}\right)y_n$$

より. これが成立するとき.

$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2} + \frac{2}{3}\alpha & \text{― ⑤} \\ \alpha\beta = \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\alpha & \text{― ⑥} \end{cases}$ となり,
$\begin{cases} \beta = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3}\alpha^2 + \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{6} \end{cases}$
$\therefore \begin{cases} \beta = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{2} \\ \alpha = \pm\frac{1}{2} \end{cases}$

よって $(\alpha, \beta) = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\right)$ である.

(4) n回目で差が 2 となるとき. $(n-1)$回目で X の状態でそこから 5. 2, 4 をだすか.
$(n-1)$回目で Z の状態でそこから 5 をだすかの いずれかより.

$$P_n = \frac{1}{3}x_{n-1} + \frac{1}{6}z_{n-1} = \frac{5}{6}z_{n-1} \quad \text{― (*)} \quad (\because (2))$$

ここで (3) より. $\begin{cases} z_{n+1} + \frac{1}{2}y_{n+1} = \frac{5}{6}\left(z_n + \frac{1}{2}y_n\right) & \text{― ⑦} \\ z_{n+1} - \frac{1}{2}y_{n+1} = \frac{1}{6}\left(z_n - \frac{1}{2}y_n\right) & \text{― ⑧} \end{cases}$ で. $z_1 = \frac{1}{6}$ $y_1 = \frac{1}{2}$ より.

⑦: $z_n + \frac{1}{2}y_n = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(z_1 + \frac{1}{2}y_1\right) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ ― ⑦' $(n \geqq 1)$

⑧: $z_n - \frac{1}{2}y_n = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(z_1 - \frac{1}{2}y_1\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) = -\frac{1}{12}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ ― ⑧' $(n \geqq 1)$

⑦' + ⑧' より. $2z_n = \frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n$ $\therefore z_n = \frac{1}{4}\cdot\frac{5^n - 1}{6^n}$ ― ⑨

よって (*) より

$$P_n = \frac{5}{24}\cdot\frac{5^{n-1} - 1}{6^{n-1}}$$

3

点 P, Q を数直線の原点におき、1 個のさいころを投げて出た目に応じて P, Q を動かす。偶数の目が出たときは P を正の向きに 1 だけ動かし、5 または 6 の目が出たときは Q を正の向きに 1 だけ動かす。たとえば、6 の目が出たときには、P, Q をともに正の向きに 1 だけ動かす。P と Q の距離が初めて 2 となるまでさいころを投げ続けることとし、P, Q の距離が 2 となったら、それ以降はさいころを投げない。n 回さいころを投げて P, Q の距離が 2 となる確率を p_n とする。

(1) $p_2 = \boxed{シ}$ である。

(2) n 回さいころを投げて、P が Q よりも正の向きに 1 だけ進んでいる確率を x_n, P, Q が同じ位置にある確率を y_n, Q が P よりも正の向きに 1 だけ進んでいる確率を z_n とすると、

$$y_{n+1} = \boxed{ス}x_n + \boxed{セ}y_n + \boxed{ソ}z_n$$

という関係式が成立する。また、$x_n = \boxed{タ}z_n$ が成立する。ただし、$\boxed{ス}$ ～ $\boxed{タ}$ には数を記入すること。

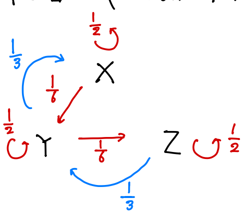
(1) 条件を整理すると.

$$\begin{cases} 2,4 \rightarrow \text{Pかすすむ} \\ 1,3 \rightarrow \text{何もおきない} \\ 5 \rightarrow \text{Qかすすむ} \\ 6 \rightarrow \text{P, Qかすすむ} \end{cases}$$ ということ.

2回なげて キョリが 2となるとき. ① 2,4か 2回でる / ② 5か 2回 でる. のどちらかより.

$$P_2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{5}{36}$$

(2) 以下の推移図を書く. (x_n, y_n, z_n が成立する状態をそれぞれ X, Y, Z とする.)



左図のようになるので.

$$y_{n+1} = \frac{1}{6}x_n + \frac{1}{2}y_n + \frac{1}{3}z_n$$ であり.

$$\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{3}y_n & -① \\ z_{n+1} = \frac{1}{2}z_n + \frac{1}{6}y_n & -② \end{cases}$$ である.

ここで $x_1 = \frac{1}{3}$ $z_1 = \frac{1}{6}$ であり. $x_k = 2z_k$ であるとき. ①② より帰納的に $x_{k+1} = 2z_{k+1}$ も分かるので.
ここから. $x_n = 2z_n$ となる.

$\boxed{4}$

以下の設問では、区間 $[a,b]$ で連続な関数 $f(x), g(x), h(x)$ に対して、区間 $[a,b]$ で $f(x) \leqq g(x)$ ならば $\int_a^b f(x)dx \leqq \int_a^b g(x)dx$ であること、および $\left|\int_a^b h(x)dx\right| = \int_a^b |h(x)|\,dx$ であることをことわりなしに用いてよい。

(1) 自然数 n に対して $I_n = \int_1^n \left(\frac{1}{x}\right)^{3/2} dx$ とする。このとき、$\lim_{n\to\infty} I_n = \boxed{\text{ト}}$ である。

(2) 自然数 n に対して $S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k}\right)^{3/2}$ とする。すべての n に対して不等式

$$S_n < 1 + \frac{5\sqrt{2}}{4}$$

を証明しなさい。

$x^{-\frac{3}{2}}$ とすると積分しやすい!

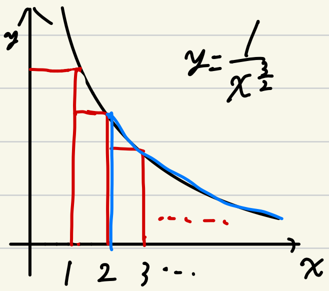
$I_n=\int_1^n\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{3}{2}}dx$

$=\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_1^n$

$=2-2n^{-\frac{1}{2}}$

$\therefore \lim_{n\to\infty} I_n = 2$ //

(2) Σ の不等式が出てきたら、積分を用いて上や下から押さえる!



$y=\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}$

赤い長方形を足していくと $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}\right)$ となる

青の部分を上から押さえて、

$n \geqq 2$ のとき、

$S_n < 1+\frac{1}{2\sqrt{2}}+\int_2^n \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx$ となる。

$\int_2^n \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}dx=\left[-2x^{-\frac{1}{2}}\right]_2^n=\sqrt{2}-2n^{-\frac{1}{2}}$ なので、

$S_n<1+\frac{5\sqrt{2}}{4}-2n^{-\frac{1}{2}}<1+\frac{5\sqrt{2}}{4}$ となる。

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} x\cos 5x\,dx = -\boxed{ナ}$ である。

(4) k を自然数とするとき、$\displaystyle\int_0^{2\pi} |\sin kx|\,dx = \boxed{ニ}$ である。

(5) $f(x)$ を微分可能な関数とし、M を正の定数とする。区間 $[0, 2\pi]$ で、$f'(x)$ は連続かつ $|f'(x)| \leqq M$ と仮定する。自然数 k, n に対して、$a_k = \displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx$ とし、$T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} |a_k|^{\frac{3}{2}}$ とする。このとき、すべての n に対して不等式

$$T_n < 23M^{\frac{3}{2}}$$

を証明しなさい。ただし、必要であれば (2) の不等式と (4) の等式を証明なしに用いてよい。

(3) 部分積分！

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos 5x\,dx = \left[\frac{x\sin 5x}{5}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 5x}{5}\,dx$$

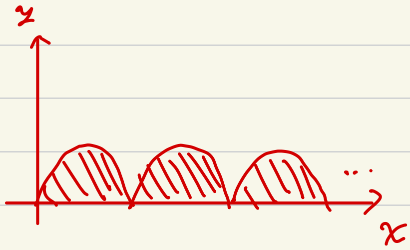
$$= \left[\frac{x\sin 5x}{5} + \frac{\cos 5x}{25}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{10} - \frac{1}{25}$$

(4) $u = kx$ と置換すると、

$$\frac{du}{dx} = k$$

$$\int_0^{2\pi} |\sin kx|\,dx = \frac{1}{k}\int_0^{2\pi k} |\sin u|\,du$$



ここで

$|\sin u|$ は周期 2π なので

$$\frac{1}{k}\int_0^{2\pi k} |\sin u|\,du = \int_0^{2\pi} |\sin u|\,du$$

$$= 2\int_0^{\pi} \sin u\,du$$

$$= 2\Big[-\cos u\Big]_0^{\pi}$$

$$= 4$$

(5) 誘導に乗って部分積分してみる。

$$a_k=\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

$$=-\frac{1}{k}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin kx\,dx \quad \left(\left[\frac{1}{k}f(x)\sin kx\right]_0^{2\pi}=0\right)$$

したがって、

$$|a_k|\leqq\frac{1}{k}\int_0^{2\pi}|f'(x)||\sin kx|\,dx$$

$$\leqq\frac{4M}{k}$$

$$|a_k|^{\frac{3}{2}}\leqq 8M^{\frac{3}{2}}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}|a_k|^{\frac{3}{2}}\leqq 8M^{\frac{3}{2}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}$$

また、

(2) より $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^{\frac{3}{2}}}<\frac{8+10\sqrt{2}}{8}$

$$<\frac{23}{8} \quad (1.4<\sqrt{2}<1.5 \text{ より})$$

$$\therefore\ T_n<23M^{\frac{3}{2}}$$

$\boxed{5}$

座標平面上に 3 点 A$(x, 0)$, B(x, y), C$(0, y)$ をとる。ただし、B は単位円周上を動き、$x > 0$, $y > 0$ である。このとき、線分 AB と BC の長さが等しくなる x の値は $x = \boxed{\text{ヌ}}$ である。

次に、n を 2 以上の整数とし、$k = 1, 2, \ldots, n-1$ に対して $x = \frac{k}{n}$ のときの線分 AB と BC の短い方の長さを $L_n(k)$ と表す。$n = 4$ とすると、$L_4(k)$ $(k = 1, 2, 3)$ の最大値は $\boxed{\text{ネ}}$ である。一方、$n = 5$ のとき $L_5(k)$ が最大となる k の値は $\boxed{\text{ノ}}$ と $\boxed{\text{ハ}}$ の 2 個ある。同様に、2 以上の整数 a で、$L_a(k)$ が最大となる k の値が 2 個あるものを考え、そのような k のうち大きい方の値を m とおく。このとき、m を a の式で表すと $m = \boxed{\text{ヒ}}$ となる。また、$b = 3a + 4m - 2$ とおいたとき、$L_b(k)$ が最大となる k の値も 2 個あり、それらの大きい方を a と m の 1 次式で表すと $\boxed{\text{フ}}$ となる。

$AB = BC$ より $y = x$

$x^2 + y^2 = 1$ なので $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ //

$k = 1, 2, \cdots n-1$ に対して

$x = \frac{k}{n}$ $y = \sqrt{1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2}$

とおくと、

$AB = y$, $BC = \frac{k}{n}$ である

$n = 4$ のとき

$L_4(1) = 0.25$ $L_4(2) = 0.5$ $L_4(3) = \frac{\sqrt{7}}{4}$

よって最大値 $\frac{\sqrt{7}}{4}$ //

$n = 5$ のとき

$L_5(1) = 0.2$ $L_5(2) = 0.4$ $L_5(3) = 0.6$ $L_5(4) = 0.6$ 3と4 //

$L_a(k)$ が最大となる k の値が 2 つあるとき. 大きい方を m とすると $\because$ ($\frac{k}{n}$ は k が大きくなれば、大きくなり y は k が大きくなれば、小さくなる)

$\frac{m-1}{a} = \sqrt{1 - \left(\frac{m}{a}\right)^2}$

$(m-1)^2 = a^2 - m^2$

$2m^2 - 2m + 1 = a^2$ $m = \frac{1 + \sqrt{2a^2 - 1}}{2}$ //

$b=3a+4m-2$ とおくと

同様に，$n=b$ の場合でも「$L_b(k)$ が最大となる k の値が 2 つある」とすると，

その大きい方を M とおくと，

$M=\dfrac{1+\sqrt{2b^2-1}}{2}$ となる．

$$\begin{aligned}(2M-1)^2 &= 2b^2-1\\ &= 18a^2+32m^2+7+48am-24a-32m\\ &= 16a^2+36m^2+9+48am-24a-36m\\ &= (4a+6m-3)^2\end{aligned}$$

($a^2=2m^2-2m+1$ を用いて a と m の係数を移行した)

$\therefore 2M-1=4a+6m-3$

$M=2a+3m-1$ //