ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

慶應義塾大学
経済学部

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

ゴウカライズ HP

公式LINE 無料相談実施中

$\boxed{1}$

(1) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}, \cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ とする。座標平面上の点 O, A, B, C をそれぞれ

$$\mathrm{O}(0,0),\quad \mathrm{A}(5,0),\quad \mathrm{B}(5\cos\alpha, 5\sin\alpha),\quad \mathrm{C}(5\cos 3\alpha, 5\sin 3\alpha)$$

とする。

(a) $\triangle$OAB の面積は $\boxed{\quad}$、辺 AB の長さは $\boxed{\quad}$ である。

(b) $\triangle$OBC の面積は $\boxed{\quad}$、辺 BC の長さは $\boxed{\quad}$ である。

(c) 線分 AC の長さは $\boxed{\quad}$ である。

(2)

$$|m+n-6| + |m-n-2| \leqq 6 \qquad ①$$

を満たす整数 m, n を考える。$(m+n-6)(m-n-2) \geqq 0$ のとき、m, n が不等式 ① を満たすための必要十分条件は

$$\boxed{\quad} \leqq m \leqq \boxed{\quad}$$

である。同様に、$(m+n-6)(m-n-2) \leqq 0$ のとき、m, n が ① を満たすための必要十分条件は

$$\boxed{\quad} \leqq n \leqq \boxed{\quad}$$

である。よって、m, n が ①を満たすとき、$(m-n)(m+n-6)$ の最大値は、

$$(m-n)(m+n-6) = (m - \boxed{\quad})^2 - (n - \boxed{\quad})^2$$

より $\boxed{\quad}$ である。

2

数列 $\{a_n\}$ に対して

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^k} \frac{(k+2)!}{(k-1)!} a_k \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

とおくとき、

$$T_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

が成り立つとする。ただし、$0! = 1$ である。

(1) $a_1 = \boxed{\quad}$, $a_2 = \boxed{\quad}$ である。

(2) $n \geqq 2$ に対して

$$T_n - T_{n-1} = \boxed{\quad} n - \boxed{\quad}$$

が成り立つから、

$$a_n = r^n \frac{n - \boxed{\quad}}{(n+s)(n+t)(n+u)} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$$

である。ただし、ここに $r = \boxed{\quad}$ であり、$s < t < u$ として $s = \boxed{\quad}$, $t = \boxed{\quad}$, $u = \boxed{\quad}$ である。

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$ とおく。$k \geqq 2$ に対して

$$a_k = \frac{1}{\boxed{\quad}} \left\{ \frac{r^{k+1}}{(k+1)(k+\boxed{\quad})} - \frac{r^k}{(k+1)(k+\boxed{\quad})} \right\}$$

が成り立つから、

$$S_n = -\boxed{\quad} + \frac{r^{n+1}}{\boxed{\quad}(n+p)(n+q)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

である。ただし、ここに $p < q$ として $p = \boxed{\quad}$, $q = \boxed{\quad}$ である。

3

2 枚の硬貨を同時に投げることを試行という。各回の試行において、座標平面上の点 P は次の (A), (B), (C) に従って座標平面上を移動する。

(A) 点 P が (x, y) にあるとき、表が 2 枚出れば $(x+1, y+\sqrt{3})$ に移動する。

(B) 点 P が (x, y) にあるとき、裏が 2 枚出れば $(x+1, y-\sqrt{3})$ に移動する。

(C) 点 P が (x, y) にあるとき、表と裏が 1 枚ずつ出れば $(x-2, y)$ に移動する。

例えば、点 P が $(1, \sqrt{3})$ にあるとき、裏が 2 枚出れば、点 P は $(2, 0)$ に移動する。

(1) 1 回目の試行前に原点にある点 P が、3 回目の試行後に原点にある確率は $\boxed{}$ である。

(2) 1 回目の試行前に原点にある点 P が、3 回目の試行後に y 軸上にある確率は $\boxed{}$ である。

(3) 1 回目の試行前に原点にある点 P が、5 回目の試行後に x 軸上にある確率は $\boxed{}$ である。

(4) 1 回目の試行前に原点にある点 P が 5 回目の試行後に x 軸上にあるとき、8 回目の試行後に円 $x^2 + y^2 = 4$ 上にある条件付き確率は $\boxed{}$ である。

4

p を正の実数、m を自然数とし、曲線 $y = -x^2$ 上の点 $(-p, -p^2)$ における接線と直線 $y = 2m$ の交点を P_m とする。P_m の x 座標が 1 以下となる m の最大値を N とする。

(1) P_m の x 座標を、p と m を用いて表せ。

(2) $N = 40$ が成り立つ p の範囲を求めよ。

以下、n を自然数とし、$a = 3n\log_3 6 - \log_3 2 + n$ とする。

(3) 3^a は 2 以上の自然数である。3^a の素因数分解を、n を用いて書け。

(4) $p = 3^a$ のとき、$N < 2^{1000}$ となる自然数 n の最大値を求めよ。なお、必要があれば $1.58 < \log_2 3 < 1.59$ を用いよ。

$\boxed{5}$

座標空間の原点 O を中心とする半径 1 の球面を C、点 M$(4,0,0)$ を中心とする半径 2 の球面を D とする。

(1) p,q を実数とする。xy 平面上の直線 $y=px+q$ は、球面 C と xy 平面が交わってできる円と点 A_1 で接し、球面 D と xy 平面が交わってできる円と点 A_2 で接し、かつ、$0<p<1$ を満たすとする。p と q の値を求めよ。

(2) r,s を実数とする。xz 平面上の直線 $z=rx+s$ は、球面 C と xz 平面が交わってできる円と点 B_1 で接し、球面 D と xz 平面が交わってできる円と点 B_2 で接し、かつ、$r<-1$ を満たすとする。r と s の値を求めよ。

以下、点 E は $\overrightarrow{\mathrm{A_1E}}=(0,0,1)$ を満たすとし、3 点 $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\mathrm{E}$ を通る平面を α とする。また、点 F は $\overrightarrow{\mathrm{B_1F}}=(0,1,0)$ を満たすとし、3 点 $\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2,\mathrm{F}$ を通る平面を β とする。α と β が交わってできる直線を ℓ とし、ℓ と xy 平面の交点を G、ℓ と xz 平面の交点を H とする。

(3) G の座標を求めよ。

(4) ℓ 上の点 T を、実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}+t\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ と表す。$\triangle\mathrm{OMT}$ の面積が最小となる t の値を求めよ。

$\boxed{6}$

C を $y = 3x^2$ で定まる曲線とし、C 上に異なる 2 点 $\mathrm{A}(a, 3a^2)$, $\mathrm{B}(b, 3b^2)$ をとる。ただし、$a < b$ とする。

(1) C と直線 AB で囲まれた図形の面積 S を、a と b を用いて表せ。ただし、積分を用いて計算し、解答欄には積分の計算過程も書くこと。

(2) 2 点 A, B 間の距離が 3 のとき、(1) で求めた面積 S の取りうる値の最大値 T を求めよ。

(3) 2 点 A, B 間の距離が 3 のとき、直線 AB は点 $(0, 7)$ を通らないことを示せ。

$\boxed{1}$

(1) $\sin\alpha = \dfrac{3}{5}, \cos\alpha = \dfrac{4}{5}$ とする。座標平面上の点 O, A, B, C をそれぞれ

$$\mathrm{O}(0,0), \quad \mathrm{A}(5,0), \quad \mathrm{B}(5\cos\alpha, 5\sin\alpha), \quad \mathrm{C}(5\cos 3\alpha, 5\sin 3\alpha)$$

とする。

(a) △OAB の面積は $\boxed{}$、辺 AB の長さは $\boxed{}$ である。

(b) △OBC の面積は $\boxed{}$、辺 BC の長さは $\boxed{}$ である。

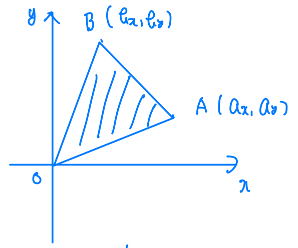
(c) 線分 AC の長さは $\boxed{}$ である。

$\boxed{1}$

(1) $\triangle OAB = \dfrac{1}{2}\left|25\sin\alpha - 0\cdot 5\cos\alpha\right| = \dfrac{25}{2}\cdot\dfrac{3}{5} = \dfrac{15}{2}$

$\overrightarrow{AB} = (5\cos\alpha - 5,\ 5\sin\alpha)$ より

$AB = 5\sqrt{(\cos\alpha - 1)^2 + \sin^2\alpha} = 5\sqrt{2 - 2\cos\alpha} = 5\sqrt{\dfrac{2}{5}} = \sqrt{10}$



$\triangle AOB = \dfrac{1}{2}\left|a_x b_y - a_y b_x\right|$

$\triangle OBC = \dfrac{1}{2}\left|25\sin\alpha\cos 3\alpha - 25\cos\alpha\sin 3\alpha\right|$

$= \dfrac{25}{2}\left|\sin(\alpha - 3\alpha)\right| = \dfrac{25}{2}\left|\sin 2\alpha\right| = 25\sin\alpha\cos\alpha = 12$

$\overrightarrow{BC} = (5\cos 3\alpha - 5\cos\alpha,\ 5\sin 3\alpha - 5\sin\alpha)$ より.

$BC = 5\sqrt{(\cos 3\alpha - \cos\alpha)^2 + (\sin 3\alpha - \sin\alpha)^2} = 5\sqrt{2 - 2(\cos\alpha\cos 3\alpha + \sin\alpha\sin 3\alpha)}$

$= 5\sqrt{2 - 2\cos(3\alpha - \alpha)}$

$= 5\sqrt{2 - 2(2\cos^2\alpha - 1)} = 5\sqrt{4 - 4\cdot\dfrac{16}{25}} = 5\sqrt{\dfrac{36}{25}} = 6$

(c)

$\overrightarrow{AC} = (5\cos 3\alpha - 5,\ 5\sin 3\alpha)$ より.

$AC = 5\sqrt{(\cos 3\alpha - 1)^2 + \sin^2 3\alpha} = 5\sqrt{2 - 2\cos 3\alpha}$

$= 5\sqrt{2}\sqrt{1 - (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)}$

$= 5\sqrt{2} \times \sqrt{1 + 3\cdot\dfrac{4}{5} - 4\cdot\dfrac{64}{125}} = 5\sqrt{2} \times \sqrt{\dfrac{169}{125}} = \dfrac{5\times 13}{5\sqrt{5}} \times \sqrt{2} = \dfrac{13}{5}\sqrt{10}$

(2)

$$|m+n-6|+|m-n-2| \leqq 6 \qquad ①$$

を満たす整数 m,n を考える。$(m+n-6)(m-n-2) \geqq 0$ のとき、m,n が不等式 ① を満たすための必要十分条件は

$$\boxed{} \leqq m \leqq \boxed{}$$

である。同様に、$(m+n-6)(m-n-2) \leqq 0$ のとき、m,n が ① を満たすための必要十分条件は

$$\boxed{} \leqq n \leqq \boxed{}$$

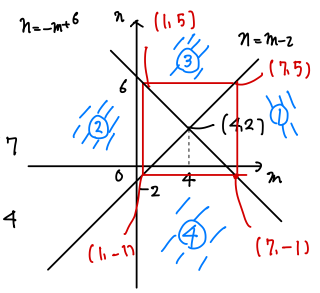
である。よって、m,n が ①を満たすとき、$(m-n)(m+n-6)$ の最大値は、

$$(m-n)(m+n-6) = (m-\boxed{})^2-(n-\boxed{})^2$$

より $\boxed{}$ である。

(2) $(m+n-6)(m-n-2) \geqq 0$ のとき

$\begin{cases} m+n-6 \geqq 0 \\ m-n-2 \geqq 0 \end{cases}$ ―① または $\begin{cases} m+n-6 \leqq 0 \\ m-n-2 \leqq 0 \end{cases}$ ―②



① のとき、

(与式) $= 2m-8 \leqq 6$ ∴ $m \leqq 7$ 右図とあわせて $4 \leqq m \leqq 7$

② のとき

(与式) $= -2m+8 \leqq 6$ ∴ $1 \leqq m$ 右図とあわせて $1 \leqq m \leqq 4$

よって $1 \leqq m \leqq 7$

$(m+n-6)(m-n-2) \leqq 0$ のとき、

$\begin{cases} m+n-6 \geqq 0 \\ m-n-2 \leqq 0 \end{cases}$ ―③ または $\begin{cases} m+n-6 \leqq 0 \\ m-n-2 \geqq 0 \end{cases}$ ―④

③ のとき

(与式) $= (m+n-6)-(m-n-2) = 2n-4 \leqq 6$ ∴ $n \leqq 5$ 上図とあわせて $2 \leqq n \leqq 5$

④ のとき

(与式) $= -(m+n-6)+(m-n-2) = -2n+4 \leqq 6$ ∴ $n \geqq -1$ 上図とあわせて $-1 \leqq n \leqq 2$

よって $-1 \leqq n \leqq 5$

よって $(m-n)(m+n-6)$ の Max は

$$(m-n)(m+n-6) = (m+n)(m-n) - 6(m-n)$$
$$= m^2-n^2-6m+6n = (m-3)^2-(n-3)^2$$

より、上の条件より (m,n) は上図の赤の正方形内（境界含む）を動くので

$n=3$, $m=7$ のときに最大となり、16

$\boxed{2}$

数列 $\{a_n\}$ に対して

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3^k}\frac{(k+2)!}{(k-1)!}a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

とおくとき、

$$T_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成り立つとする。ただし、$0! = 1$ である。

(1) $a_1 = \boxed{}$, $a_2 = \boxed{}$ である。

(2) $n \geqq 2$ に対して

$$T_n - T_{n-1} = \boxed{}n - \boxed{}$$

が成り立つから、

$$a_n = r^n \frac{n - \boxed{}}{(n+s)(n+t)(n+u)} \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

である。ただし、ここに $r = \boxed{}$ であり、$s < t < u$ として $s = \boxed{}$, $t = \boxed{}$, $u = \boxed{}$ である。

(3) $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$ とおく。$k \geqq 2$ に対して

$$a_k = \frac{1}{\boxed{}}\left\{\frac{r^{k+1}}{(k+1)(k+\boxed{})} - \frac{r^k}{(k+1)(k+\boxed{})}\right\}$$

が成り立つから、

$$S_n = -\boxed{} + \frac{r^{n+1}}{\boxed{}(n+p)(n+q)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

である。ただし、ここに $p < q$ として $p = \boxed{}$, $q = \boxed{}$ である。

(1) $n=1$ のとき

$$T_1 = \left(1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{2}{3^1}\cdot\frac{3!}{0!}a_1 \quad \therefore \quad 4a_1 = \frac{1}{4} \quad \therefore \ a_1 = \frac{1}{16}$$

$n=2$ のとき

$$T_2 = \left(2-\frac{1}{2}\right)^2 = 4a_1 + \frac{2}{3^2}\cdot\frac{4!}{1!}a_2 \quad \therefore \ \frac{9}{4} = \frac{1}{4} + \frac{16}{3}a_2 \quad \therefore \ a_2 = \frac{3}{8}$$

(2) $$T_n - T_{n-1} = \left(n-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(n-\frac{3}{2}\right)^2 = (2n-2)\times 1 = 2n-2$$

また、$T_n - T_{n-1} = \dfrac{\cancel{2}\,(n+2)!}{3^n\,(n-1)!}a_n = \cancel{2}n - \cancel{2}$

$$\therefore \ a_n = \frac{3^n\cdot(n-1)(n-1)!}{(n+2)!} = \frac{3^n(n-1)}{n(n+2)(n+1)}$$ より $r=3$ $(s,t,u) = (0,1,2)$

$(n+2)! = (n-1)! \times n \times (n+1) \times (n+2)$

(3) まず、$a_k = \dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{3^{k+1}}{(k+1)(k+2)} - \dfrac{3^k}{(k+1)k}\right\}$ と部分分数分解でき、$(k \geqq 2)$

分母が積の形で
あることに注目

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots a_n$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{3^3}{3\cdot4} - \frac{3^2}{2\cdot3}\right) + \left(\frac{3^4}{4\cdot5} - \frac{3^3}{4\cdot3}\right) + \cdots \left(\frac{3^{n+1}}{(n+1)(n+2)} - \frac{3^n}{(n+1)n}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{16} + \frac{1}{2}\left\{-\frac{3}{2} + \frac{3^{n+1}}{(n+1)(n+2)}\right\}$$
$$= -\frac{11}{16} + \frac{3^{n+1}}{2(n+1)(n+2)}$$

$\boxed{3}$

2 枚の硬貨を同時に投げることを試行という。各回の試行において、座標平面上の点 P は次の (A), (B), (C) に従って座標平面上を移動する。

(A) 点 P が (x, y) にあるとき、表が 2 枚出れば $(x+1, y+\sqrt{3})$ に移動する。

(B) 点 P が (x, y) にあるとき、裏が 2 枚出れば $(x+1, y-\sqrt{3})$ に移動する。

(C) 点 P が (x, y) にあるとき、表と裏が 1 枚ずつ出れば $(x-2, y)$ に移動する。

例えば、点 P が $(1, \sqrt{3})$ にあるとき、裏が 2 枚出れば、点 P は $(2, 0)$ に移動する。

(1) 1 回目の試行前に原点にある点 P が、3 回目の試行後に原点にある確率は $\boxed{}$ である。

(2) 1 回目の試行前に原点にある点 P が、3 回目の試行後に y 軸上にある確率は $\boxed{}$ である。

$\boxed{3}$

条件を整理すると.

(A) $\frac{1}{4}$ の確率で $(1, \sqrt{3})$ だけ移動
(B) $\frac{1}{4}$ の確率で $(1, -\sqrt{3})$ だけ移動.
(C) $\frac{1}{2}$ の確率で $(-2, 0)$ だけ移動.

(1) 3回目で原点にあるとき. (A)を a回, (B)を b回, (C)を c回発生させるとすると.

$$a + b + c = 3 \quad -①$$

$$a\begin{pmatrix}1\\ \sqrt{3}\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}1\\ -\sqrt{3}\end{pmatrix} + c\begin{pmatrix}-2\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} a + b - 2c = 0 & -② \\ a - b = 0 & -③ \end{cases}$$ より,

$(a, b, c) = (1, 1, 1)$ となる.

よってこのときの確率は

$$3! \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right) \times \left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{16}$$ //

(2) (1)と同様に考えると,

$a + b + c = 3$ $-①$ の他に
$a + b - 2c = 0$ $-②$ より,

$(a, b, c) = \underset{(ア)}{(2, 0, 1)}\ \underset{(イ)}{(1, 1, 1)}\ \underset{(ウ)}{(0, 2, 1)}$ のパターンがある.

(ア)のときは ${}_3C_1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{2}$　(イ)のときは (1)より $\frac{3}{16}$,　(ウ)も(ア)と同様に ${}_3C_2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{2}$ より.

求める確率は $\frac{3}{16} + 2 \times 3 \times \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$ //

(3) 1 回目の試行前に原点にある点 P が、5 回目の試行後に x 軸上にある確率は $\boxed{}$ である。

(4) 1 回目の試行前に原点にある点 P が 5 回目の試行後に x 軸上にあるとき、8 回目の試行後に円 $x^2+y^2=4$ 上にある条件付き確率は $\boxed{}$ である。

(3) y座標 = 0 となるので、

$$\begin{cases} a+b+c=5 & -④ \\ a=b & -⑤ \end{cases}$$

④⑤をみたす組合せは $(a,b,c) = \underset{(エ)}{(0,0,5)}\ \underset{(オ)}{(1,1,3)}\ \underset{(カ)}{(2,2,1)}$

(エ)のとき、$\left(\frac{1}{2}\right)^5$　(オ)のとき、$\frac{5!}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3$　(カ)のとき、$\frac{5!}{2!\,2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}$

よって求める確率は、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5+\frac{5!}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{5!}{2!\,2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{63}{256}$$

(4) (3)において (エ)のとき 5回目で $(-10,0)$ で この下で (8回目のx座標) $\leqq -10+1+1+1=-7$ より、$x^2>4$ より、このとき不適、

(オ)のとき、5回目で $(-4,0)$ であり、残り3回で A, B, C が それぞれ a, b, c 回おこるとすると、8回目の座標は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}+a\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -4+a+b-2c \\ \sqrt{3}(a-b) \end{pmatrix}$$

よって $(-4+a+b-2c)^2+3(a-b)^2=4$ となればよく

考えられるとき $\begin{cases} (a-b)^2=1 \\ (-4+a+b-2c)^2=1 \end{cases}$　$\begin{cases} a-b=0 \\ (-4+a+b-2c)^2=4 \end{cases}$

これらは $(a,b,c)=(2,1,0)\,(1,2,0)$ のときのみみたすので、

この確率は $\frac{5!}{3!}\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left\{2\times{}_3C_2\times\left(\frac{1}{4}\right)^3\right\}$ − ⑥

(カ)のとき、5回目で $(2,0)$ で (オ)と同様に考えると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}+a\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}+b\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}+c\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2+a+b-2c \\ \sqrt{3}(a-b) \end{pmatrix}$$ より

$(2+a+b-2c)^2+3(a-b)^2=4$ となり、

$\begin{cases} (2+a+b-2c)^2=4 \\ a-b=0 \end{cases}$ または $\begin{cases} (2+a+b-2c)^2=1 \\ (a-b)^2=1 \end{cases}$

これをみたすのは

$(a,b,c)=(1,1,1)\,(1,0,2)\,(0,1,2)$ より

この確率は

$$\frac{5!}{2!\,2!}\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)\times\left(\frac{3}{16}+2\times3\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{2^2}\right)\quad -⑦$$

⑥⑦と(3)より、求める確率は

$$\frac{\frac{15}{4^5}+\frac{135}{4^6}}{\frac{63}{4^4}}=\frac{135+15\times4}{63\times4^2}=\frac{195}{63\times4^2}=\frac{65}{336}$$

$\boxed{4}$

p を正の実数、m を自然数とし、曲線 $y=-x^2$ 上の点 $(-p,-p^2)$ における接線と直線 $y=2m$ の交点を P_m とする。P_m の x 座標が 1 以下となる m の最大値を N とする。

(1) P_m の x 座標を、p と m を用いて表せ。

(2) $N=40$ が成り立つ p の範囲を求めよ。

以下、n を自然数とし、$a=3n\log_3 6-\log_3 2+n$ とする。

(3) 3^a は 2 以上の自然数である。3^a の素因数分解を、n を用いて書け。

(4) $p=3^a$ のとき、$N<2^{1000}$ となる自然数 n の最大値を求めよ。なお、必要があれば $1.58<\log_2 3<1.59$ を用いよ。

1) $y'=-2x$ より

$x=-p$ における接線の傾きは $2p$

よって接線の方程式は. $y=2px+p^2$

$y=2m$ との交点の x 座標は. $2px+p^2=2m$

$$x=\frac{2m-p^2}{2p} \quad //$$

2) $\dfrac{2m-p^2}{2p}\leqq 1$ を解くと

$2m-p^2\leqq 2p \quad m\leqq \dfrac{p^2+2p}{2}$

これを満たす m の最大値が N ということは,

$N=\left[\dfrac{p^2+2p}{2}\right]$ と表せる. ($[M]$ は M 以下の最大の整数)

$N=40$ より

$40\leqq \dfrac{p^2+2p}{2}<41$

$\Leftrightarrow 80\leqq p^2+2p<82$

$p^2+2p-80\geqq 0$ より

$p\geqq 8$

$p^2+2p-82<0$ より

$p<-1+\sqrt{83}$ 　　$8\leqq p<-1+\sqrt{83} \quad //$

(3)

$3^a=6^{3n}\times 3^n\times\dfrac{1}{2}$ 　$\left(3^{3n\log_3 6}=\left(3^{\log_3 6}\right)^{3n}=6^{3n}\right)$

$=2^{3n-1}\times 3^{4n} \quad //$

(4) ガウス記号を用いている時は概算であたりをつける!

(1)より $p^2+2p=2^{6n-2}3^{8n}+2^{3n}3^{4n}$

$\dfrac{p^2+2p}{2}=2^{6n-3}3^{8n}+2^{3n-1}3^{4n}$

ここで $2^{6n-3}3^{8n}\gg 2^{3n-1}3^{4n}$ なので、まず $2^{6n-3}3^{8n}<2^{1000}$ として考える (概算!)

両辺 $\log_2$ でとると、$6n-3+8n\log_2 3<1000$

$6n-3+8n\log_2 3<18.7n-3<1000$ 　　$n<53.7\cdots$

$n=53$ と概算できる

たしかに、$n=53$ では $N<2^{1000}$ だが. $n=54$ では $N>2^{1000}$ となる. 　$\therefore n=53 \quad //$

5

座標空間の原点 O を中心とする半径 1 の球面を C、点 M$(4,0,0)$ を中心とする半径 2 の球面を D とする。

(1) p, q を実数とする。xy 平面上の直線 $y = px + q$ は、球面 C と xy 平面が交わってできる円と点 A_1 で接し、球面 D と xy 平面が交わってできる円と点 A_2 で接し、かつ、$0 < p < 1$ を満たすとする。p と q の値を求めよ。

(2) r, s を実数とする。xz 平面上の直線 $z = rx + s$ は、球面 C と xz 平面が交わってできる円と点 B_1 で接し、球面 D と xz 平面が交わってできる円と点 B_2 で接し、かつ、$r < -1$ を満たすとする。r と s の値を求めよ。

(1) 円と直接が接する条件から求める.

球面C: $x^2+y^2+z^2=1$ と xy平面との交わり

$x^2+y^2=1$

球面D: $(x-4)^2+y^2+z^2=4$ と xy平面との交わり

$(x-4)^2+y^2=4$

$y=px+q$ が $x^2+y^2=1$ に接するとは, $x^2+(px+q)^2=1$ が重解をもつこと.

よって $(1+p^2)x^2+2pqx+(q^2-1)=0$ の判別式をDとすると,

$$\frac{D}{4}=p^2q^2-(1+p^2)(q^2-1)$$
$$=p^2-q^2+1$$
$$=0 \qquad \therefore q^2=p^2+1$$

同様に

$(x-4)^2+(px+q)^2=4$ を展開すると,

$(1+p^2)x^2+(2pq-8)x+q^2+12=0$

$$\frac{D}{4}=(pq-4)^2-(1+p^2)(q^2+12)$$
$$=-8pq-q^2-12p^2+4$$
$$=0$$

$\therefore q^2=-8pq-12p^2+4$

$$\begin{cases} q^2=p^2+1 \\ q^2=-8pq-12p^2+4 \end{cases} \iff \begin{cases} 3=13p^2+8pq \\ q^2=p^2+1 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} 3-13p^2=8p\sqrt{p^2+1} \cdots ① \\ q^2=p^2+1 \cdots ② \end{cases}}$$

(2)でも同じ!

①より $169p^4-78p^2+9=64p^4+64p^2$

$105p^4-142p^2+9=0$

$(7p^2-9)(15p^2-1)=0$

$$\therefore p=\frac{1}{\sqrt{15}} \qquad q=\frac{4}{\sqrt{15}}$$

(2) (1)の式が使える！

Cとzx平面との交わり

$x^2+z^2=1$

Dとzx平面との交わり

$(x-4)^2+z^2=4$

これらが $z=rx+s$ に同様に接することより、

(1)の途中式を引用して、

$$\begin{cases} 3-13r^2=8r\sqrt{r^2+1} & \cdots ① \\ s^2=r^2+1 & \cdots ② \end{cases}$$

①より $(7r^2-9)(15r^2-1)=0$

$r<-1$ より $r=-\dfrac{3}{\sqrt{7}}$　　$s=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ //

以下、点 E は $\overrightarrow{\mathrm{A_1E}}=(0,0,1)$ を満たすとし、3 点 $\mathrm{A_1,A_2,E}$ を通る平面を α とする。また、点 F は $\overrightarrow{\mathrm{B_1F}}=(0,1,0)$ を満たすとし、3 点 $\mathrm{B_1,B_2,F}$ を通る平面を β とする。α と β が交わってできる直線を ℓ とし、ℓ と xy 平面の交点を G、ℓ と xz 平面の交点を H とする。

(3) G の座標を求めよ。

(4) ℓ 上の点 T を、実数 t を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}+t\overrightarrow{\mathrm{GH}}$ と表す。△OMT の面積が最小となる t の値を求めよ。

(3)

$\mathrm{A_1}$は、$x^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{15}}x+\dfrac{4}{\sqrt{15}}\right)^2=1$ を解いて $16x^2+8x+1=0$ より $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{15}}{4}, 0\right)$

$\mathrm{A_2}$は $(x-4)^2+\left(\dfrac{1}{\sqrt{15}}x+\dfrac{4}{\sqrt{15}}\right)^2=4$ を解いて $16x^2-112x+196=0$ より $\left(\dfrac{7}{2}, \dfrac{\sqrt{15}}{2}, 0\right)$

よって E は $\left(-\dfrac{1}{4}, \dfrac{\sqrt{15}}{4}, 1\right)$

また

$\mathrm{B_1}$は $x^2+\left(-\dfrac{3}{\sqrt{7}}x+\dfrac{4}{\sqrt{7}}\right)^2=1$ を解いて $16x^2-24x+9=0$ より $\left(\dfrac{3}{4}, 0, \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$

$\mathrm{B_2}$は $(x-4)^2+\left(-\dfrac{3}{\sqrt{7}}x+\dfrac{4}{\sqrt{7}}\right)^2=4$ を解いて $16x^2-80x+100=0$ より $\left(\dfrac{5}{2}, 0, -\dfrac{\sqrt{7}}{2}\right)$

F は $\left(\dfrac{3}{4}, 1, \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$

α：3点 $\mathrm{A_1}$ $\mathrm{A_2}$ E を通る。

β：3点 $\mathrm{B_1}$ $\mathrm{B_2}$ F を通る。

3点の座標が分かっているので、

$\alpha: \sqrt{15}x-15y+4\sqrt{15}=0$ ・・①

$\beta: 3\sqrt{7}x+7z-4\sqrt{7}=0$ ・・②

ℓ の $z=0$ との交点は $\left(\dfrac{4}{3}, \dfrac{16\sqrt{15}}{45}, 0\right)$ となる。 //　(①, ②, $z=0$ を連立する)

(4) l と xz 平面の交点は H: $\left(-4, 0, \frac{16}{\sqrt{7}}\right)$

$\overrightarrow{GH} = \left(-\frac{16}{3}, -\frac{16\sqrt{15}}{45}, \frac{16\sqrt{7}}{7}\right)$

より

$T\left(\frac{4}{3}-\frac{16}{3}t, \frac{16\sqrt{15}}{45}(1-t), \frac{16\sqrt{7}}{7}t\right)$ となる。

△OMT の面積は

$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OT}|$

ここで $\overrightarrow{OM} = (4, 0, 0)$ $\overrightarrow{OT} = (X(t), Y(t), Z(t))$ とすれば、

$\frac{1}{2}|\overrightarrow{OM} \times \overrightarrow{OT}| = \sqrt{4Y(t)^2+4Z(t)^2}$

$= \sqrt{\frac{1024}{945}(142t^2-14t+7)}$

$= \sqrt{\frac{1024}{945}\left\{142\left(t-\frac{7}{142}\right)^2+\frac{945}{142}\right\}}$

よって $\underline{t = \frac{7}{142}}_{/\!/}$ の時に最小値をとる。

6

C を $y=3x^2$ で定まる曲線とし、C 上に異なる 2 点 $\mathrm{A}(a, 3a^2)$, $\mathrm{B}(b, 3b^2)$ をとる。ただし、$a<b$ とする。

(1) C と直線 AB で囲まれた図形の面積 S を、a と b を用いて表せ。ただし、積分を用いて計算し、解答欄には積分の計算過程も書くこと。

(2) 2 点 A, B 間の距離が 3 のとき、(1) で求めた面積 S の取りうる値の最大値 T を求めよ。

(3) 2 点 A, B 間の距離が 3 のとき、直線 AB は点 $(0, 7)$ を通らないことを示せ。

まず、ABを通る直線は $y=3(a+b)-3ab$ とかける。
求める面積は

$$S=\int_a^b\{3(a+b)x-3ab-3x^2\}dx$$

$$=\left[\frac{3}{2}(a+b)x^2-3abx-x^3\right]_a^b$$

$$=-\frac{3}{2}ab^2+\frac{1}{2}b^3+\frac{3}{2}a^2b-\frac{1}{2}a^3$$

$$=\frac{1}{2}(b-a)^3$$

(2)

ABのきょりは $\sqrt{(b-a)^2+(3b^2-3a^2)^2}=3$　3.

これを $d=b-a$　$m=b+a$　← 変数変換!

とおくと、

$d^2+9d^2m^2=9$　$d^2(1+9m^2)=9$ と書ける。

$d^2=\dfrac{9}{1+9m^2}$ より $d^3=\dfrac{27}{(1+9m^2)^{\frac{3}{2}}}$ となる。

このとき $m^2\geqq 0$ より $d^3\leqq 27$ （等号成立は $a+b=0$）

よって $S=\dfrac{d^3}{2}$ の取りうるTは $\dfrac{27}{2}$

(3) ABのきょりが3の時 (0, 7)を通らないことを直接考えると、式が複雑になるので、直線が(0, 7)を通る時、ABのきょりが3にならないことを示す方針で考える。

(0, 7)を通る直線は $y=px+7$ とかける

この直線が $y=3x^2$ と交わる点 (x, y) は $3x^2-px-7=0$ をみたす x座標で与えられる

それらを $\mathrm{A}(x_1, 3x_1^2)$ $\mathrm{B}(x_2, 3x_2^2)$ とする。

解と係数の関係より
$$\begin{cases} x_1+x_2=\dfrac{p}{3} \\ x_1x_2=-\dfrac{7}{3}\end{cases}$$
⇐ 定石!

このとき ABの長さは $(x_2-x_1)\sqrt{1+9(x_1+x_2)^2}=\dfrac{1}{3}\sqrt{(p^2+84)(1+p^2)}$

（$(x_2-x_1)^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2$ を用いる。）

もしこれが3だとすると、$(p^2+84)(1+p^2)=81$ より $p^4+85p^2+3=0$

ところが左辺 p^4+85p^2+3 は常に正なので解をもたない。

すなわち、ABの長さが3のとき (0, 7)を通らない。