ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

慶應義塾大学

商学部

2025年2月14日

$\boxed{1}$

以下の文章の空欄に適切な数または符号を入れて文章を完成させなさい。

(i) 5 個の値 $25, 13, 19, c, 31$ からなるデータの平均値が $c+4$ である。このとき、$c = \boxed{}$ であり、データの分散は $\boxed{}$ である。

(ii) 空間に 2 点 A, B があり、その 2 点間の距離は 1 である。点 A を中心とする半径 3 の球を、点 B を含む平面で切断してできる円の半径の最大値は $\boxed{}$ 最小値は $\boxed{}$ である。

(iii) 不等式 $\log_2 x \leqq y \leqq 9$ を満たす正の整数の組 (x, y) は $\boxed{}$ 組存在する。

(iv) 関数 $f(\theta) = \left| \int_0^1 (x + \sin\theta) dx \right|$ を $-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で考えるとき、$f(0)$ は $\theta = \boxed{}$ のとき最小値 $\boxed{}$ を、$\theta = \boxed{}$ のとき最大値 $\boxed{}$ をとる。

(v) a を正の定数とする。xy 平面上の 4 点 $(0,0), (1,0), (1,1), (0,1)$ を頂点とする正方形を、放物線 $y = ax^2$ によって 2 つの図形に分ける。このとき、2 つの図形の面積が等しくなるような定数 a の値は $\boxed{}$ である。

$\boxed{2}$

xy 平面上の 2 曲線

$$y = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \quad と \quad y = -\frac{1}{x} \quad (x < 0)$$

をそれぞれ C_1, C_2 とする。O を原点、P を曲線 C_1 上の点とするとき、曲線 C_2 上の点 Q を、OP $\perp$ OQ となるように定める。このとき、以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

ただし、(エ) と (オ) については、**底を素数、指数を有理数で表した数の積として、できるだけ簡単な形で答えなさい**。たとえば、$\dfrac{14\sqrt{3}}{9}$ を解答する場合には $2 \cdot 3^{-\frac{3}{2}} \cdot 7$ と答えなさい。

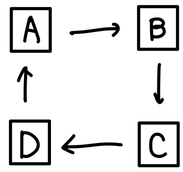
(i) 以下、P の x 座標を a とする。このとき、a を用いて $\triangle$OPQ の面積を表すと $\boxed{}$ である。また、線分 PQ の中点と O を通る直線を ℓ とする。PQ と x 軸が平行でないとき、a を用いて ℓ の傾きを表すと $\boxed{}$ である。

(ii) $a > 1$ のとき、ℓ と C_1 との交点を R とする。a を用いて R の x 座標を表すと $\boxed{}$ である。また、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と x 軸がなす角が 15° のとき、R の x 座標は $\boxed{}$ である。

(iii) k を定数とする。放物線 $y = -x^2 + k$ と C_1 の共有点が 1 個になるとき、k の値は $\boxed{}$ である。

$\boxed{3}$

太郎と花子は、右図 (この PDF では下) のように配置された A, B, C, D の 4 マスを矢印の向きに進むゲームを行う。



ルールは次に与えられる。

(a) 太郎は A を出発し、花子は B を出発する。

(b) 太郎は赤いサイコロ、花子は青いサイコロを振り、それぞれの出た目に応じて、1 か 2 の目が出たら 1 マス、3 か 4 の目が出たら 2 マス、5 か 6 の目が出たら 3 マス進む。移動が終わった時点での太郎と花子の位置を、それぞれの 1 回目の位置とよぶ。

(c) 自然数 n に対し、太郎と花子はそれぞれの n 回目の位置から出発し、(b) と同じ手順で移動する。移動が終わった時点での太郎と花子の位置を、それぞれの $n+1$ 回目の位置とよぶ。

このとき、以下の文章の空欄に適切な数または符号を入れて文章を完成させなさい。

(i) 太郎と花子の 1 回目の日の位置が同じである確率は $\boxed{}$ である。また、太郎と花子の 2 回目の位置が同じである確率は $\boxed{}$ である。

(ii) 太郎と花子の n 回目の位置が同じである確率を p_n とするとき、

$$p_{n+1} = \boxed{}\,p_n + \boxed{}$$

が成り立ち、

$$p_n = \boxed{}\left\{1 - \left(\boxed{}\right)^n\right\}$$

と表せる。

$\boxed{4}$

下図のように、xy 平面上に三角形 $T_1, T_2, T_3, \ldots$ が以下の規則 1、規則 2 で並べられている。

(規則 1) T_1 は 3 点 $A_1(0,0)$, $B_1\left(\dfrac{1}{2}, 1\right)$, $A_2(1,0)$ を頂点とする三角形である。

(規則 2) 2 以上の自然数 n について、T_n は 3 点 A_n, B_n, A_{n+1} を頂点とし、次の 5 つの条件を満たす三角形である。

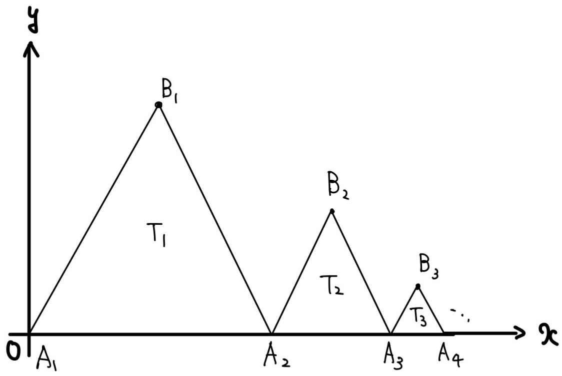
(a) 点 A_n と点 A_{n+1} は x 軸上にあり、点 B_n は第 1 象限に存在する。

(b) 点 A_{n+1} の x 座標は点 A_n の x 座標より大きい。

(c) A_nB_n の長さと B_nA_{n+1} の長さは等しい。

(d) A_nA_{n+1} の長さは $A_{n-1}A_n$ の長さの $\dfrac{1}{2}$ 倍である。

(e) T_n の面積は T_{n-1} の面積の $\dfrac{1}{8}$ 倍である。



以下の文章の空欄に適切な数または符号を入れて文章を完成させなさい。

(i) $\cos\angle \mathrm{B_2A_2A_3} = \boxed{}$ であり、 $\cos\angle \mathrm{B_1A_2B_2} = \boxed{}$ である。

(ii) 自然数 n に対し、点 A_n の座標は $\boxed{}$ である。

(iii) 自然数 n に対し、点 B_n の座標は $\boxed{}$ である。

(iv) 点 $\mathrm{B_1, B_2, B_3}, \ldots$ は同一の放物線上にある。この放物線の方程式は $\boxed{}$ である。

$\boxed{1}$

以下の文章の空欄に適切な数または符号を入れて文章を完成させなさい。

(i) 5 個の値 $25, 13, 19, c, 31$ からなるデータの平均値が $c+4$ である。このとき、$c = \boxed{}$ であり、データの分散は $\boxed{}$ である。

(ii) 空間に 2 点 A, B があり、その 2 点間の距離は 1 である。点 A を中心とする半径 3 の球を、点 B を含む平面で切断してできる円の半径の最大値は $\boxed{}$ 最小値は $\boxed{}$ である。

(iii) 不等式 $\log_2 x \leqq y \leqq 9$ を満たす正の整数の組 (x, y) は $\boxed{}$ 組存在する。

$\boxed{1}$

(i) $5 \times (c+4) = 25 + 13 + 19 + c + 31$ ← 平均 × 人数 ＝ データの総和.

$\therefore\ 5c + 20 = c + 88$

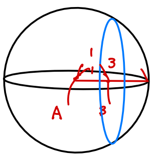
$\therefore\ 4c = 68 \qquad \therefore\ c = 17$ －(1)(2)

分散 ＝（2乗平均）－（平均の2乗）を用いるのがはやい.

$(平均)^2 = 21^2 = 441$

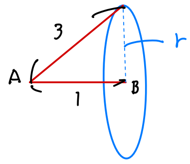
$(2乗平均) = \frac{1}{5}(25^2 + 13^2 + 19^2 + 17^2 + 31^2) = 481$　よって 分散 $= 481 - 441 = 40$

(ii)



最大になるときは断面が A を通るときで. このとき 3

逆に最小は AB ⊥ 断面となるときであり、このときの半径は



$r^2 = 3^2 - 1^2 = 8 \quad \therefore\ r = 2\sqrt{2}$

(iii) 格子点の問題は x か y のどちらかを固定する. 今回は y 固定がはやい.

y のとりうる範囲は $1 \leqq y \leqq 9$ であり、$y = k\ (1 \leqq k \leqq 9)$ のとき、

$\log_2 x \leqq k \quad \therefore\ x \leqq 2^k$ であり、これをみたす x は 2^k 個である.　} y 固定

よって求める (x, y) の組の数は

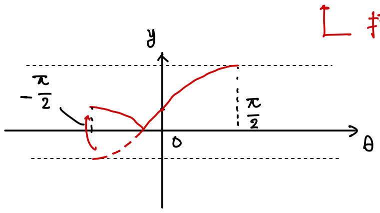
$\displaystyle\sum_{k=1}^{9} 2^k = 2 \cdot \frac{2^9 - 1}{2 - 1} = 2(512 - 1) = 1022$　} y をうごかす

(iv) 関数 $f(\theta)=\left|\int_0^1 (x+\sin\theta)dx\right|$ を $-\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ の範囲で考えるとき、$f(0)$ は $\theta=\boxed{}$ のとき最小値 $\boxed{}$ を、$\theta=\boxed{}$ のとき最大値 $\boxed{}$ をとる。

(v) a を正の定数とする。xy 平面上の 4 点 $(0,0),(1,0),(1,1),(0,1)$ を頂点とする正方形を、放物線 $y=ax^2$ によって 2 つの図形に分ける。このとき、2 つの図形の面積が等しくなるような定数 a の値は $\boxed{}$ である。

(iv) $\int_0^1 (x+\sin\theta)\,dx=\frac{1}{2}+\sin\theta$ より、$\left|\frac{1}{2}+\sin\theta\right|$ の Max, min を考えればよいだけ。

↑ 描いた方がはやい。

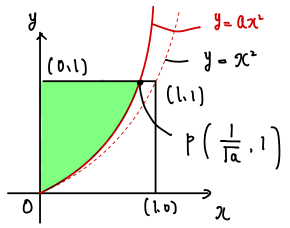


$y=f(\theta)$ のグラフは左図であり、図より、Max は $\theta=\frac{\pi}{2}$ で $\frac{3}{2}$

min は $\theta=-\frac{\pi}{6}$ で 0

本来なら交わる辺で場合分けする必要があるが、図形的考察で回避

(v)



$y=ax^2$ が下に凸であることを考えると、$a\leqq1$ のとき $0\leqq x\leqq1$ で $ax^2\leqq x$ より、$a>1$ であり、この下で図のような配置となる。

ここで、正方形の面積 1 より、緑でぬりつぶされた領域の面積が $\frac{1}{2}$ となるので 2次関数と正方形の辺の交点 $P\left(\frac{1}{\sqrt{a}},1\right)$ に注意して、

$$\frac{1}{2}=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}(1-ax^2)\,dx$$

$$=\left[x-\frac{1}{3}ax^3\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{a}}}=\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{1}{3}a\cdot\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{2}{3\sqrt{a}}$$

$\therefore\ \sqrt{a}=\frac{4}{3}\quad\therefore\ a=\frac{16}{9}$

$\boxed{2}$

xy 平面上の 2 曲線

$$y = \frac{1}{x} \quad (x > 0) \quad と \quad y = -\frac{1}{x} \quad (x < 0)$$

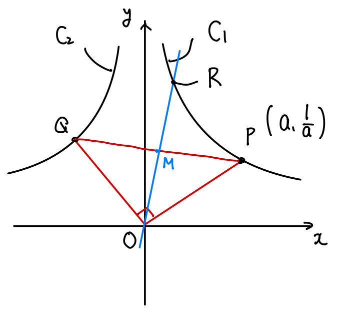
をそれぞれ C_1, C_2 とする。O を原点、P を曲線 C_1 上の点とするとき、曲線 C_2 上の点 Q を、OP $\perp$ OQ となるように定める。このとき、以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい。

ただし、(エ) と (オ) については、**底を素数、指数を有理数で表した数の積として、できるだけ簡単な形で答えなさい。** たとえば、$\dfrac{14\sqrt{3}}{9}$ を解答する場合には $2 \cdot 3^{-\frac{3}{2}} \cdot 7$ と答えなさい。

(i) 以下、P の x 座標を a とする。このとき、a を用いて △OPQ の面積を表すと $\boxed{}$ である。また、線分 PQ の中点と O を通る直線を ℓ とする。PQ と x 軸が平行でないとき、a を用いて ℓ の傾きを表すと $\boxed{}$ である。

(ii) $a > 1$ のとき、ℓ と C_1 との交点を R とする。a を用いて R の x 座標を表すと $\boxed{}$ である。また、$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と x 軸がなす角が 15° のとき、R の x 座標は $\boxed{}$ である。

$\boxed{2}$



(i) OP ⊥ OQ より、(OPの傾き) × (OQの傾き) = −1 に注目。

OPの傾き $= \dfrac{1}{a^2}$ より、OQの傾き $= -a^2$ であり、

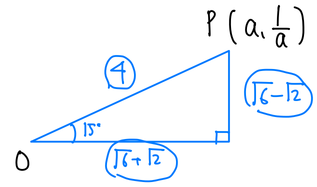
OQ : $y = -a^2 x$ であり、$y = -\dfrac{1}{x}$ との交点は、

$Q\left(-\dfrac{1}{a}, a\right)$ であり、$OP = OQ = \sqrt{a^2 + \dfrac{1}{a^2}}$ なので、

$$\triangle OPQ = \frac{1}{2} \cdot OP \cdot OQ = \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)$$

また、PQ中点を M とすると、$M\left(\dfrac{1}{2}\left(a - \dfrac{1}{a}\right), \dfrac{1}{2}\left(a + \dfrac{1}{a}\right)\right)$ より、

$$\ell : y = \frac{\frac{1}{2}\left(a + \frac{1}{a}\right)}{\frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{a}\right)} x = \frac{a^2+1}{a^2-1} x$$



(ii) $y = \dfrac{1}{x}$ と $y = \dfrac{a^2+1}{a^2-1} x$ の交点 R の x 座標は、

$$\frac{1}{x} = \frac{a^2+1}{a^2-1} x \quad \therefore \quad x = \sqrt{\frac{a^2-1}{a^2+1}} \quad —①$$

また、OPとx軸のなす角が 15° のとき、

$$a : \frac{1}{a} = \sqrt{6} + \sqrt{2} : \sqrt{6} - \sqrt{2} = a^2 : 1$$

$$\therefore (\sqrt{6} - \sqrt{2}) a^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2}) \quad \therefore \quad a^2 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2 = \frac{1}{4}(8 + 4\sqrt{3}) = 2 + \sqrt{3} \quad —②$$ より、

② を ① に代入して、R の x 座標は、

$$\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}-1}{2+\sqrt{3}+1}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+1}{3+\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{\cancel{\sqrt{3}+1}}{\sqrt{3}(\cancel{\sqrt{3}+1})}} = 3^{-\frac{1}{4}}$$

(iii) k を定数とする。放物線 $y=-x^2+k$ と C_1 の共有点が 1 個になるとき、k の値は $\boxed{}$ である。

定数分離

(iii) これだけ独立しています.

$$\begin{cases} -x^2+k=\dfrac{1}{x} \\ x>0 \end{cases}$$ なる x が 1個になるような k の値は. $y=k$ と $y=x^2+\dfrac{1}{x}$ の交点の数に帰着する.

$y=x^2+\dfrac{1}{x}$　∴ $y'=2x-\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{1}{x^2}(2x^3-1)$ より. 左下のような増減表かかけ、$y\Big|_{x=2^{-\frac{1}{3}}}=2^{-\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$ であり.

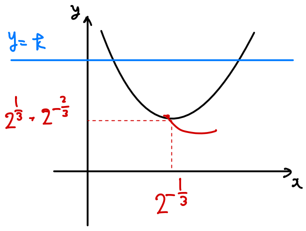
x	0		$2^{-\frac{1}{3}}$	
y'		$-$	0	$+$
y		↘		↗

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\lim_{x\to+0}y=\infty$ より.

右図を考えて.

条件をみたすとき.

$k=2^{-\frac{2}{3}}+2^{\frac{1}{3}}$



$\boxed{3}$

太郎と花子は、右図 (この PDF では下) のように配置された A, B, C, D の 4 マスを矢印の向きに進むゲームを行う。

$$\begin{array}{ccc} \boxed{\text{A}} & \longrightarrow & \boxed{\text{B}} \\ \uparrow & & \downarrow \\ \boxed{\text{D}} & \longleftarrow & \boxed{\text{C}} \end{array}$$

ルールは次に与えられる。

(a) 太郎は A を出発し、花子は B を出発する。

(b) 太郎は赤いサイコロ、花子は青いサイコロを振り、それぞれの出た目に応じて、1 か 2 の目が出たら 1 マス、3 か 4 の目が出たら 2 マス、5 か 6 の目が出たら 3 マス進む。移動が終わった時点での太郎と花子の位置を、それぞれの 1 回目の位置とよぶ。

(c) 自然数 n に対し、太郎と花子はそれぞれの n 回目の位置から出発し、(b) と同じ手順で移動する。移動が終わった時点での太郎と花子の位置を、それぞれの $n+1$ 回目の位置とよぶ。

このとき、以下の文章の空欄に適切な数または符号を入れて文章を完成させなさい。

(i) 太郎と花子の 1 回目の日の位置が同じである確率は $\boxed{}$ である。また、太郎と花子の 2 回目の位置が同じである確率は $\boxed{}$ である。

(ii) 太郎と花子の n 回目の位置が同じである確率を p_n とするとき、

$$p_{n+1} = \boxed{}\,p_n + \boxed{}$$

が成り立ち、

$$p_n = \boxed{}\left\{1 - \left(\boxed{}\right)^n\right\}$$

と表せる。

i) サイコロの目の 1と2をE 3と4をF 5と6をGとする。
この時、サイコロをふると A. B. Cが $\frac{1}{3}$の確率で出る。
1回目の位置が同じということは、太郎 F. 花子 E or 太郎G 花子F
なので、$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times 2 = \underline{\frac{2}{9}}$

(ii) から考える。
n回目に太郎と花子が同じ位置にいて、n+1回目も同じ位置にいる確率は、太郎と花子がE.F.Gのうち同じものを出す確率なので、$\frac{1}{3}$.
n回目に太郎と花子が違う位置にいる時、n+1回目に同じ位置にいる確率を考える。
(i)で考えたことを元にすると、
① n回目に太郎と花子が 1マス差の時：n+1回目に同じ位置にいる確率は $\frac{2}{9}$
n回目に太郎と花子が 2マス差の時：n+1回目に同じ位置にいる確率は、
太郎E 花子G or 太郎G 花子F であり、$\frac{2}{9}$

よって、$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{2}{9}(1-p_n)$
$= \underline{\frac{1}{9}p_n + \frac{2}{9}}$

$p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{9}\left(p_n - \frac{1}{4}\right)$

$p_1 - \frac{1}{4} = -\frac{1}{36}$

より、
$p_n = -\frac{1}{36}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$
$= \underline{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^n\right\}}$

$\underline{p_2 = \frac{20}{81}}$ … ((i) の答え)

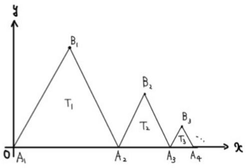
4

下図のように、xy 平面上に三角形 $T_1, T_2, T_3, \ldots$ が以下の規則 1、規則 2 で並べられている。

(規則 1) T_1 は 3 点 $A_1(0,0)$, $B_1\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, $A_2(1,0)$ を頂点とする三角形である。

(規則 2) 2 以上の自然数 n について、T_n は 3 点 A_n, B_n, A_{n+1} を頂点とし、次の 5 つの条件を満たす三角形である。

(a) 点 A_n と点 A_{n+1} は x 軸上にあり、点 B_n は第 1 象限に存在する。
(b) 点 A_{n+1} の x 座標は点 A_n の x 座標より大きい。
(c) A_nB_n の長さと B_nA_{n+1} の長さは等しい。
(d) A_nA_{n+1} の長さは $A_{n-1}A_n$ の長さの $\frac{1}{2}$ 倍である。
(e) T_n の面積は T_{n-1} の面積の $\frac{1}{8}$ 倍である。



以下の文章の空欄に適切な数または符号を入れて文章を完成させなさい。

(i) $\cos\angle B_2A_2A_3 = \boxed{}$ であり、$\cos\angle B_1A_2B_2 = \boxed{}$ である。

(ii) 自然数 n に対し、点 A_n の座標は $\boxed{}$ である。

(iii) 自然数 n に対し、点 B_n の座標は $\boxed{}$ である。

(iv) 点 $B_1, B_2, B_3, \ldots$ は同一の放物線上にある。この放物線の方程式は $\boxed{}$ である。

T_2の高さは面積 $\frac{1}{8}$倍. 底辺 $\frac{1}{2}$倍より T_1と比べて $\frac{1}{4}$倍となる。 (高さが $\frac{1}{4}$倍ずつされることに気づく!)

また. $A_1(0,0)$ $A_2(1,0)$. $A_3(\frac{3}{2},0)$ より　$B_2\left(\frac{5}{4}, \frac{1}{4}\right)$

$\therefore \cos B_2A_2A_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle B_2A_2A_3 = \alpha$　$\angle B_1A_1A_2 = \beta$ とすると.

$$
\begin{aligned}
\cos\angle B_1A_2B_2 &= \cos(\pi - \alpha - \beta) \\
&= -\cos(\alpha + \beta) \\
&= \sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta \\
&= \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{10}}{10} \quad /\!/
\end{aligned}
$$

加法定理

(ii) A_nのx座標は $n \geqq 2$の時.

$$
\sum_{k=0}^{n-2}\left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}} = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}
$$

これは, $n=1$の時も成り立つ。　$n \geqq 2$としているので. 確認必要

$\therefore A_n = \left(2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}, 0\right)$

(iii) B_nのy座標は $\frac{1}{4}$倍されていくので. B_nのy座標は $\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

x座標は $\frac{A_n + A_{n+1}}{2} = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$= 2 - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

全体として指数のミスに注意! 具体的な値を代入してチェック!

$B_n = \left(2-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right)$

(iv) $B_n\ (X, Y)$ とすると.

$-\frac{2}{3}(X-2) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$　$\therefore$ $Y = \frac{4}{9}(X-2)^2$

$= \frac{4}{9}X^2 - \frac{16}{9}X + \frac{16}{9}$ //