ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

早稲田大学
理工学部

2025年2月16日

$\boxed{1}$

複素数平面上で、複素数 z が円 $|z| = 1$ の上を動くとき、

$$w = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)z + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{z}$$

を満たす点 w の軌跡を C とする。次の問いに答えよ。

(1) C はどのような図形か、複素数平面上に図示せよ。

(2) C と円 $\left|z - \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{2}$ の共有点を求めよ。

(3) C で囲まれる領域と $\left|z - \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right| \leqq \sqrt{2}$ の表す領域の共通部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$

xy 平面上で、連立不等式

$$0 < x \leqq 1, \quad 0 \leqq y \leqq \log\frac{1}{x}$$

で定まる領域と y 軸の $y \geqq 0$ の部分を合わせた図形を D とする。D に含まれる三角形の面積の最大値を求めよ。

$\boxed{3}$

1 から n までの異なる自然数が 1 つずつ書かれた n 枚のカードが一列に並んでいる。このとき、どのカードも現在とは異なる位置に移動するように並べ替えてできる順列の総数を a_n と表し、並べ替えの総数 $n!$ に占める a_n の割合を p_n で表す。例えば、

$$a_1 = 0, \quad p_1 = 0, \quad a_2 = 1, \quad p_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 2, \quad p_3 = \frac{1}{3}$$

である。次の問いに答えよ。

(1) a_4 の値を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ のとき、a_n を a_{n-1} と a_{n-2} を用いて表せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき、$p_n - p_{n-1}$ を n を用いて表せ。

4

空間内に原点 O を中心とする半径 r の球面 S がある。さらに、半径が $1, 2, 3$ の球面 S_1, S_2, S_3 があり、これら 4 つの球面のうちどの 2 つの球面も互いに外接している。S_1, S_2, S_3 の中心を順に $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ とし、$\mathrm{O}, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3$ は同一平面上にないとする。さらに、球面 S が球面 S_1, S_2, S_3 と接する 3 つの点と、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_2} + \overrightarrow{\mathrm{OP}_3}\right)$$

により定まる点 Q は、同一平面上にあるとする。次の問いに答えよ。

(1) r の値を求めよ。

(2) 四面体 $\mathrm{OP}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の体積を求めよ。

5

xy 平面上の曲線 $C : y = \sqrt[3]{x^2+2}$ を考え、C 上の $(0, \sqrt[3]{2})$ 以外の点 P (a, b) における接線を $\ell : y = kx + c$ と表す。C と ℓ の方程式から x を消去して得られる y についての 3 次方程式 $f(y) = 0$ は b を重解としてもつので、もう 1 つの解を b' とする。ただし、b が 3 重解のときは $b' = b$ とみなす。次の問いに答えよ。

(1) $2b + b'$ を k のみの分数式で表せ。

(2) b' を b のみの分数式で表せ。

(3) C と ℓ の共有点で、その y 座標が b' であるものを $\mathrm{P}'(a', b')$ とする。a, b が有理数ならば、a', b' も有理数であることを示せ。

(4) b が奇数 p, q と負でない整数 r を用いて $b = \dfrac{p}{2^r q}$ で与えられるとする。有理数 b' を奇数 p', q' と整数 s を用いて $b' = \dfrac{p'}{2^s q'}$ と表すとき、s を r の式で表せ。

(5) 点 $\mathrm{P}(5, 3)$ が曲線 C 上の点であることを利用して、曲線 C 上に x 座標と y 座標がともに有理数であるような点が無数に存在することを示せ。

$\boxed{1}$

複素数平面上で、複素数 z が円 $|z|=1$ の上を動くとき、

$$w = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)z + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\frac{1}{z}$$

を満たす点 w の軌跡を C とする。次の問いに答えよ。

(1) C はどのような図形か、複素数平面上に図示せよ。

(2) C と円 $\left|z - \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right| = \sqrt{2}$ の共有点を求めよ。

(3) C で囲まれる領域と $\left|z - \dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right| \leqq \sqrt{2}$ の表す領域の共通部分の面積を求めよ。

$\boxed{1}$

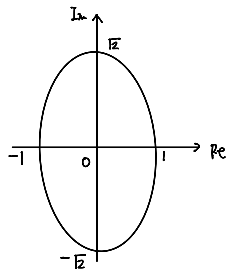
(1) $Z = \cos\theta + i\sin\theta$ とおくと ← 極形式でおく

$$w = \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)(\cos\theta + i\sin\theta) + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)(\cos\theta - i\sin\theta)$$

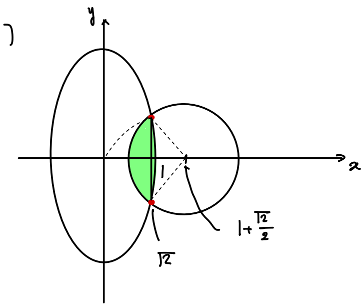
$$= \cos\theta + \sqrt{2}\, i \sin\theta \quad \text{となる}$$

ここで $w = x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ とおくと、$x = \cos\theta$, $y = \sqrt{2}\sin\theta$ となるため、

$x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1$ $(\because \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1)$ より、右図.



(2)(3)



左図の交点の (x, y) の組は

$$\begin{cases} x^2 + \frac{1}{2}y^2 = 1 & \text{—①} \\ \left(x - \frac{2+\sqrt{2}}{2}\right)^2 + y^2 = 2 & \text{—②} \end{cases}$$

の解である.

①を②に代入して

$$\left(x - 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (\cancel{2} - 2x^2) = \cancel{2}$$

$$\therefore\ -2x^2 + x^2 - (2+\sqrt{2})x + \left(1 + \sqrt{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\therefore\ x^2 + (2+\sqrt{2})x - \left(\frac{3}{2} + \sqrt{2}\right) = 0$$

$$\therefore\ x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}$$

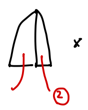
図より $x > 0$ より、

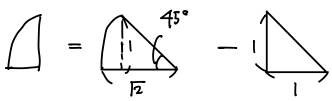
$x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ である.

よって求める点は $x + yi$ より

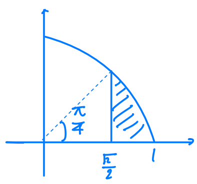
$\frac{1}{\sqrt{2}} \pm i$ が共有点である.

また、求める面積について S とすると、

$S =$  $\times 2$

①: 

$$= \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$



②: 

$$= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \sqrt{2 - 2x^2}\, dx = \sqrt{2}\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx = \sqrt{2}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}\right)$$

よって

$$S = 2 \times \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

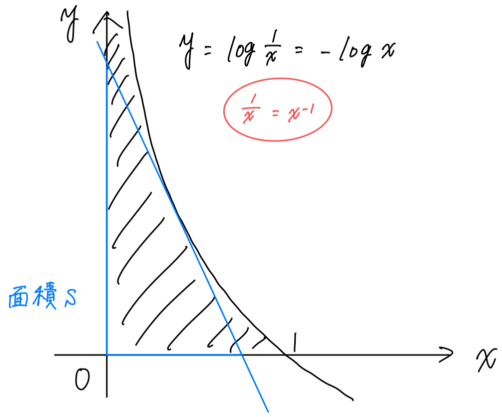
$$= \frac{2+\sqrt{2}}{4}(\pi - 2)$$

$\boxed{2}$

xy 平面上で、連立不等式

$$0 < x \leqq 1,\quad 0 \leqq y \leqq \log\frac{1}{x}$$

で定まる領域と y 軸の $y \geqq 0$ の部分を合わせた図形を D とする。D に含まれる三角形の面積の最大値を求めよ。



グラフの斜線部が D である。
三角形の面積が最大になるのは、
原点 O と、グラフ上のある点 $(t, -\log t)$
の接線と x 軸、y 軸の交点の 3 点を
頂点としたときで、この三角形の面積を
最大とする t を求める。

接線を求める。

$y = \log\frac{1}{x} = -\log x$ より、$y' = -\frac{1}{x}$

接線の方程式は、

$y = -\frac{1}{t}(x - t) - \log t$

$= -\frac{1}{t}x - \log t + 1$

◎接線の方程式
$f(x)$ の $(t, f(t))$ における
接線の方程式は
$y = f'(t)(x - t) + f(t)$

次に x 軸、y 軸との交点を求める。

$y = 0$ のとき、$0 = -\frac{1}{t}x + 1 - \log t$

$x = t(1 - \log t)$

$x = 0$ のとき、$y = 1 - \log t$

よって、三角形の面積 S は、

$S = \frac{1}{2}\{t(1-\log t)\}(1-\log t) = \frac{1}{2}t(1-\log t)^2$

$0 < t \leqq 1$ で、S の最大値を求める。

積の微分法則

$S' = \frac{1}{2}\{(1-\log t)^2 + t\cdot 2(1-\log t)\cdot(-\frac{1}{t})\}$

$= \frac{1}{2}(1-\log t)(1-\log t - 2)$

$= \frac{1}{2}(1-\log t)(-\log t - 1)$

◎積の微分法則
$\{f(x)g(x)\}'$
$= f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$S' = 0$ となるとき $t = e, \frac{1}{e}$

$0 < t \leqq 1$ で増減表を考えると、

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
S'	/	$+$	0	$-$	/
S	/	↗		↘	0

よって $t = \frac{1}{e}$ のとき、S は最大値をとる。

このとき $S = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{e}(1 - \log\frac{1}{e})^2$

$= \frac{1}{2e}\{1-(-1)\}^2 = \frac{4}{2e} = \frac{2}{e}$

$\therefore \frac{2}{e}$

$\boxed{3}$

1 から n までの異なる自然数が 1 つずつ書かれた n 枚のカードが一列に並んでいる。このとき、どのカードも現在とは異なる位置に移動するように並べ替えてできる順列の総数を a_n と表し、並べ替えの総数 $n!$ に占める a_n の割合を p_n で表す。例えば、

$$a_1 = 0,\quad p_1 = 0,\quad a_2 = 1,\quad p_2 = \frac{1}{2},\quad a_3 = 2,\quad p_3 = \frac{1}{3}$$

である。次の問いに答えよ。

(1) a_4 の値を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ のとき、a_n を a_{n-1} と a_{n-2} を用いて表せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき、$p_n - p_{n-1}$ を n を用いて表せ。

$\boxed{3}$

(1)(2) $n \geqq 3$ のとき 1 が書かれたカードが i 番目 $(2 \leqq i \leqq n)$ にきているときに、i が書かれたカードがどの位置にあるかで場合分け。

① 1番目に来ているとき、

結局、1, i を除く $(n-2)$ 枚の順列に等しいので、a_{n-2} 通り ―①

② 1番目以外にきているとき、

結局 1 以外の $(n-1)$ 枚の順列に等しいので、a_{n-1} 通り ―②

①② より、求める a_n は

i に無関係)

$$a_n = \sum_{i=2}^{n} \left(a_{n-1} + a_{n-2} \right) = (n-1)\left(a_{n-1} + a_{n-2} \right) \quad \text{―(2)}$$

また、$a_4 = 3(a_3 + a_2)$ だが、

$a_2 = 1 \quad a_3 = 2$ より、 $\quad a_4 = 3 \times (1+2) = 9$ ―(1)

(2, 3, 1)
(3, 1, 2)

(3) $p_n = \dfrac{a_n}{n!}$ より、

$$p_n - p_{n-1} = \frac{a_n}{n!} - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{a_n - n a_{n-1}}{n!} = \frac{n-1}{n!}\left(a_{n-1} + a_{n-2} \right) - \frac{a_{n-1}}{(n-1)!}$$

$$= -\frac{1}{n}\left\{ \frac{a_{n-1}}{(n-1)!} - \frac{a_{n-2}}{(n-2)!} \right\}$$

$$= -\frac{1}{n}\left\{ p_{n-1} - p_{n-2} \right\}$$

よって $p_n - p_{n-1} = -\dfrac{1}{n}\left(p_{n-1} - p_{n-2} \right)$ より、両辺 $\times n!(-1)^n$ して、

$p_2 - p_1 = \dfrac{1}{2}$

$$\underbrace{n!(-1)^n \left\{ p_n - p_{n-1} \right\} = (n-1)!(-1)^{n-1}\left(p_{n-1} - p_{n-2} \right)}_{\text{定数列}} = (3-1)!(-1)^{3-1}\left(p_2 - p_1 \right) = 2 \times 1 \times \frac{1}{2} = 1$$

$$\therefore\ p_n - p_{n-1} = \frac{1}{n!(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{n!(-1)^{2n}} = \frac{(-1)^n}{n!}$$

$(-1)^{2n} = 1$

4

空間内に原点 O を中心とする半径 r の球面 S がある。さらに、半径が $1, 2, 3$ の球面 S_1, S_2, S_3 があり、これら 4 つの球面のうちどの 2 つの球面も互いに外接している。S_1, S_2, S_3 の中心を順に $\mathrm{P_1, P_2, P_3}$ とし、$\mathrm{O, P_1, P_2, P_3}$ は同一平面上にないとする。さらに、球面 S が球面 S_1, S_2, S_3 と接する 3 つの点と、

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{OP_1}} + \overrightarrow{\mathrm{OP_2}} + \overrightarrow{\mathrm{OP_3}}\right)$$

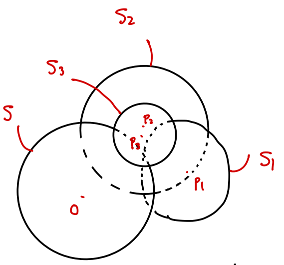
により定まる点 Q は、同一平面上にあるとする。次の問いに答えよ。

(1) r の値を求めよ。

(2) 四面体 $\mathrm{OP_1P_2P_3}$ の体積を求めよ。

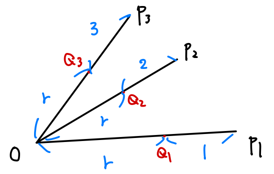
4

(1)



S が S_1, S_2, S_3 と接するときの点を Q_1, Q_2, Q_3 とする。

ここで、



左図より、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP_1} = \dfrac{r+1}{r}\overrightarrow{OQ_1} \\ \overrightarrow{OP_2} = \dfrac{r+2}{r}\overrightarrow{OQ_2} \\ \overrightarrow{OP_3} = \dfrac{r+3}{r}\overrightarrow{OQ_3} \end{cases} \quad -(*)$$

であり Q_1, Q_2, Q_3, Q は同一平面上にあるということから、

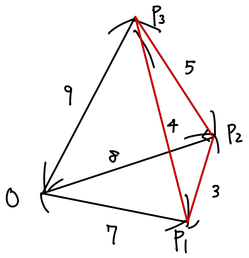
$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \overrightarrow{OP_3}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{r+1}{r}\overrightarrow{OQ_1} + \frac{r+2}{r}\overrightarrow{OQ_2} + \frac{r+3}{r}\overrightarrow{OQ_3}\right)$$

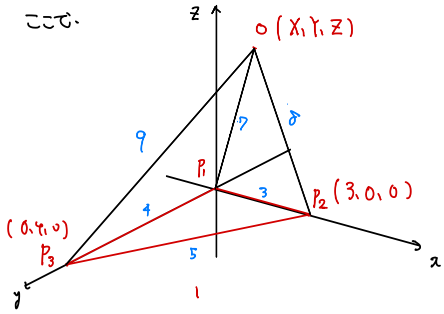
この係数の和が 1 になるので、

$$\frac{1}{4}\left(\frac{r+1}{r} + \frac{r+2}{r} + \frac{r+3}{r}\right) = 1 \qquad \therefore\ r = 6$$

(2) $OP_1P_2P_3$ は条件より以下のような図となる。△$P_1P_2P_3$ が直角三角形となることに注意する。



ここで、



ここで上のように座標を設定し、$O(X, Y, Z)$ とすると、求めたい体積は $V = \frac{1}{3} \times \triangle P_1P_2P_3 \times Z$ となる。$-①$

また条件より、

$$\begin{cases} X^2 + Y^2 + Z^2 = 49 & -② \\ (X-3)^2 + Y^2 + Z^2 = 64 & -③ \\ X^2 + (Y-4)^2 + Z^2 = 81 & -④ \end{cases}$$

②③より

$$(X-3)^2 + 49 - X^2 = 64$$

$$\therefore\ -6X + 9 - 15 = 0 \qquad \therefore\ X = -1 \quad -⑤$$

②④より

$$(Y-4)^2 + 49 - Y^2 = 81$$

$$\therefore\ -8Y + 16 - 32 = 0 \qquad \therefore\ Y = -2 \quad -⑥$$

②⑤⑥より

$$Z^2 + (-1)^2 + (-2)^2 = 49 \qquad \therefore\ Z = 2\sqrt{11} \quad -⑦$$

①⑦より

$$V = \frac{1}{3} \times 6 \times 2\sqrt{11} = 4\sqrt{11}$$

$\boxed{5}$

xy 平面上の曲線 $C : y = \sqrt[3]{x^2+2}$ を考え、C 上の $(0, \sqrt[3]{2})$ 以外の点 P (a, b) における接線を $\ell : y = kx + c$ と表す。C と ℓ の方程式から x を消去して得られる y についての 3 次方程式 $f(y) = 0$ は b を重解としてもつので、もう 1 つの解を b' とする。ただし、b が 3 重解のときは $b' = b$ とみなす。次の問いに答えよ。

(1) $2b + b'$ を k のみの分数式で表せ。

(2) b' を b のみの分数式で表せ。

(3) C と ℓ の共有点で、その y 座標が b' であるものを $\mathrm{P}'(a', b')$ とする。a, b が有理数ならば、a', b' も有理数であることを示せ。

(4) b が奇数 p, q と負でない整数 r を用いて $b = \dfrac{p}{2^r q}$ で与えられるとする。有理数 b' を奇数 p', q' と整数 s を用いて $b' = \dfrac{p'}{2^s q'}$ と表すとき、s を r の式で表せ。

(5) 点 P$(5, 3)$ が曲線 C 上の点であることを利用して、曲線 C 上に x 座標と y 座標がともに有理数であるような点が無数に存在することを示せ。

(1) ℓ の式より、$x = \dfrac{y-c}{k}$

曲線 C の式に代入すると、

$$y = \sqrt[3]{\left(\frac{y-c}{k}\right)^2 + 2}$$

$$y^3 = \left(\frac{y-c}{k}\right)^2 + 2$$

$$k^2y^3 - (y-c)^2 - 2k^2 = 0$$

$$k^2y^3 - y^2 + 2cy - (2k^2 + c^2) = 0$$

この 3次方程式の解は b, b, b' なので

解と係数の関係より、

$$b + b + b' = 2b + b' = \frac{1}{k^2}$$

$$\therefore\ 2b + b' = \frac{1}{k^2}$$

(2) 曲線 C の式を $f(x)$ とおく。

point
ℓ と C の接線の式を係数比較する

$$f'(x) = \frac{2x}{3\sqrt[3]{(x^2+2)^2}}$$

(a, b) の接線は、$y = f'(a)(x-a) + b$ より、

$$k = \frac{2a}{3\sqrt[3]{(a^2+2)^2}}, \quad b = \sqrt[3]{a^2+2} \cdots ①$$ より、$k = \dfrac{2a}{3b^2}$

① より $b^3 = a^2 + 2$　よって $k^2 = \dfrac{4(b^3-2)}{9b^4}$

ゆえに $2b + b' = \dfrac{9b^4}{4(b^3-2)}$　$b' = \dfrac{b^4+16b}{4(b^3-2)}$

(3) b が有理数であることと (2) の答えより

b' は有理数である。また、(a', b') は曲線 ℓ 上の点

なので、

$kb' = a' - c$　$\therefore\ a' = kb' + c$ である。

ここで解と係数の関係より、

$2c = b^2 + 2bb'$ より、$b, b' \in \mathbb{Q}$ で $c \in \mathbb{Q}$ であり、

$k = \dfrac{2a}{3b^2} \in \mathbb{Q}$ より、a' も有理数である。 ■

(4)
$$b' = \frac{p'}{2^s q'} = \frac{b^4 + 16b}{4(b^3-2)}$$

$$= \frac{\left(\frac{q}{2^r p}\right)^4 + 16\left(\frac{q}{2^r p}\right)}{4\left(\left(\frac{q}{2^r p}\right)^3 - 2\right)}$$

$$= \frac{p^4 + 16p \cdot 2^{3r} \cdot q^3}{2^{r+2} q\left(p^3 - 2^{3r+1} q^3\right)}$$

ここで、$q(p^3 - 2^{3r+1}q^3)$, $p^4 + 16p \cdot 2^{3r} \cdot q^3$ は共に奇数より、

○ 部分を比較して、$s = r + 2$

$\boxed{5}$

xy 平面上の曲線 $C : y = \sqrt[3]{x^2+2}$ を考え、C 上の $(0, \sqrt[3]{2})$ 以外の点 P (a, b) における接線を $\ell : y = kx + c$ と表す。C と ℓ の方程式から x を消去して得られる y についての 3 次方程式 $f(y) = 0$ は b を重解としてもつので、もう 1 つの解を b' とする。ただし、b が 3 重解のときは $b' = b$ とみなす。次の問いに答えよ。

(1) $2b + b'$ を k のみの分数式で表せ。

(2) b' を b のみの分数式で表せ。

(3) C と ℓ の共有点で、その y 座標が b' であるものを $\mathrm{P}'(a', b')$ とする。a, b が有理数ならば、a', b' も有理数であることを示せ。

(4) b が奇数 p, q と負でない整数 r を用いて $b = \dfrac{p}{2^r q}$ で与えられるとする。有理数 b' を奇数 p', q' と整数 s を用いて $b' = \dfrac{p'}{2^s q'}$ と表すとき、s を r の式で表せ。

(5) 点 P$(5, 3)$ が曲線 C 上の点であることを利用して、曲線 C 上に x 座標と y 座標がともに有理数であるような点が無数に存在することを示せ。

(5) (a, b) から (a', b') をつくる操作について.

これまでのギロンより.

$b' \neq b$ であることは. (4) より、2の指数部分が異なることから.
示される. また. (b'の2の指数部分) > (bの2の指数部分) というのは常に成立する
ので. この操作によりできる点列を (a_n, b_n) (ただし $(a_1, b_1) = (5, 3)$)
とすると、任意の p, q $(1 \leqq p < q,\ p, q \in \mathbb{Z})$ で $(a_p, b_p) \neq (a_q, b_q)$
であり、$a_n \in \mathbb{Q}$ 、$b_n \in \mathbb{Q}$ より ($\because$ (3))
C 上に条件をみたすような点は無数に存在する ■