ゴウカライズ

数学

2025

大学入試　解答速報

早稲田大学
教育学部

2025年2月19日

1

(1) k を自然数とする。次の数

$$-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2-\cdots-(2k-1)^2+(2k)^2$$

を k を用いて表せ。

(2) 座標平面上の 3 点 A$(1,0)$, B$(0,-1)$, C$(-1,1)$ を頂点とする三角形 ABC を考える。三角形 ABC をその外心を中心として反時計回りに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転することで得られる三角形の垂心の座標を求めよ。

(3) 底面が正 5 角形である 5 角柱の頂点から相異なる 4 点を選ぶとき、4 点が同一平面上にある確率を求めよ。ただし、4 点の選び方は同様に確からしいとする。

(4) 4 つの辺 AB, BC, CD, DA の長さが 1 である四面体 ABCD を考える。そのような四面体の体積の最大値を求めよ。

2

n を自然数とする。1 から n までの数字がもれなく一つずつ記入された n 枚の赤色のカードと、1 から n までの数字がもれなく一つずつ記入された n 枚の白色のカードがある。この $2n$ 枚のカードの中から同時に 2 枚を取り出し、カードに記入された数字を確認した後にもとに戻す、という試行を 2 回行う。次の問いに答えよ。

(1) 1 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字が同じであり、かつ 1 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字と 2 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字の間に共通の数字が存在しない取り出し方の総数を n を用いて表せ。

(2) 1 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字が異なり、かつ 1 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字と 2 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字の間に共通の数字が存在しない取り出し方の総数を n を用いて表せ。

(3) 1 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字と 2 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字の間に共通の数字が存在する確率を n を用いて表せ。

3

座標平面上で、点 $\mathrm{H}(0, 2\sqrt{2})$ から楕円 $C : x^2 + 2y^2 = 8$ へ引いた 2 つの接線を L_1, L_2 とし、L_1, L_2 と C との共有点をそれぞれ $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ とする。ただし、P_1 の x 座標は正であるとする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 L_1 と L_2 それぞれの傾きを求めよ。

(2) 2 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ を通る直線を L_3 とする。直線 L_3 と楕円 C で囲まれた 2 つの部分のうち、直線 L_3 の上側にある方の面積を求めよ。

4

k を実数とする。曲線 $C : y = (x^3 - x + 2)e^{-x}$ と直線 $y = k$ との共有点の個数を $f(k)$ で表す。次の問いに答えよ。ただし、必要ならば自然数 n に対し $\lim_{x \to \infty} x^n e^{-x} = 0$ が成り立つことは証明なしに用いてよい。

(1) k が実数全体を動くとき、$f(k)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $f(k) = 2$ を満たす k の値の範囲を求めよ。

(3) α を正の実数とする。曲線 C, x 軸, y 軸, および直線 $x = \alpha$ で囲まれる部分の面積を α を用いて表せ。

$\boxed{1}$

(1) k を自然数とする。次の数

$$-1^2+2^2-3^2+4^2-5^2+6^2-\cdots-(2k-1)^2+(2k)^2$$

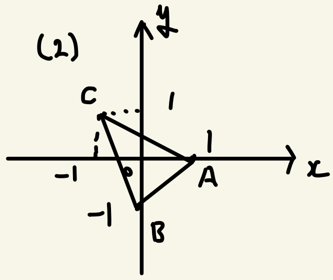
を k を用いて表せ。

$$\sum_{n=1}^{k}(2n)^2-\sum_{n=1}^{k}(2n-1)^2=\sum_{n=1}^{k}(4n-1)=\frac{1}{2}k(4k-1+3)$$

$$=k(2k+1)\ //$$

(2) 座標平面上の 3 点 A(1, 0), B(0, −1), C(−1, 1) を頂点とする三角形 ABC を考える。三角形 ABC をその外心を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転することで得られる三角形の垂心の座標を求めよ。

(2)



外心は、線分AB, BCの垂直二等分線の交点とみて、

ABの垂直二等分線は、$y=-x$

BC 〃 $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

連立して、$O\left(-\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$

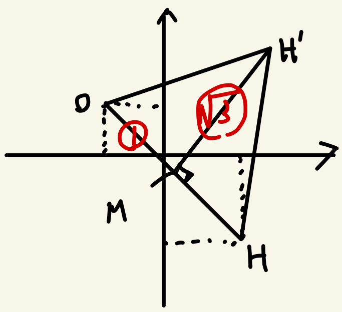
垂心は、$y=-x$, $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$の交点より

$H\left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3}\right)$

ここでHをO中心で反時計回りに$\frac{\pi}{3}$移動した点をH'とすると、△OHH'は正三角形。

$|\vec{OH}|=\frac{\sqrt{2}}{2}$より

O, Hの中点をMとすると、$M\left(\frac{1}{12},-\frac{1}{12}\right)$から、



$\begin{pmatrix}\frac{1}{12}\\-\frac{1}{12}\end{pmatrix}+\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ が求める座標。

よって、$\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{12},\ \frac{3\sqrt{3}-1}{12}\right)$ //

(3) 底面が正 5 角形である 5 角柱の頂点から相異なる 4 点を選ぶとき、4 点が同一平面上にある確率を求めよ。ただし、4 点の選び方は同様に確からしいとする。

4点が同一平面上にくるのは、

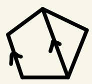
(i) 上面 or 下面から4点選ぶ場合.

$_5C_4 \cdot 2 = 10$ 通り.

(ii) 側面の辺 5本から2本選ぶ場合

$_5C_2 = 10$ 通り

(iii) 上面, 下面から2点選ぶとき, (ii) 以外では.

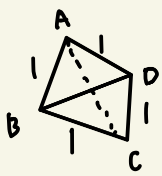


左図で 2直線が平行であることから.

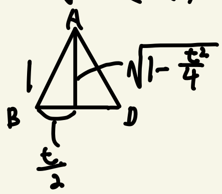
$5 \times 2 = 10$ 通り

(i)〜(iii)より $\dfrac{30}{_{10}C_4} = \dfrac{1}{7}$ //

(4) 4 つの辺 AB, BC, CD, DA の長さが 1 である四面体 ABCD を考える。そのような四面体の体積の最大値を求めよ。



BD $= t$ として固定 $(0 < t < 2)$ このとき体積の max は.
高さが max のとき. よって 面ABDが面BCDに垂直なときで, 体積は. ($V(t)$ とする)



$$V(t) = \frac{1}{2}\cdot t\left(\sqrt{1-\frac{t^2}{4}}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}\left(t - \frac{t^3}{4}\right)$$

$$V'(t) = \frac{1}{6} - \frac{t^2}{8}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	2
$V'(t)$		$+$	0	$-$	
$V(t)$		↗		↘	

よって Max は、$V\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{27}$ //

2

n を自然数とする。1 から n までの数字がもれなく一つずつ記入された n 枚の赤色のカードと、1 から n までの数字がもれなく一つずつ記入された n 枚の白色のカードがある。この $2n$ 枚のカードの中から同時に 2 枚を取り出し、カードに記入された数字を確認した後にもとに戻す、という試行を 2 回行う。次の問いに答えよ。

(1) 1 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字が同じであり、かつ 1 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字と 2 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字の間に共通の数字が存在しない取り出し方の総数を n を用いて表せ。

(2) 1 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字が異なり、かつ 1 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字と 2 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字の間に共通の数字が存在しない取り出し方の総数を n を用いて表せ。

(3) 1 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字と 2 回目に取り出した 2 枚のカードに記入された数字の間に共通の数字が存在する確率を n を用いて表せ。

(1) 1回目の数字の選び方は n 通り、2回目はその数字以外の $2n-2$ 枚から選ぶので、 $n \cdot {}_{2n-2}C_2 = n(n-1)(2n-3)$ //

(2) 1回目のカードの選び方は、${}_{2n}C_2 - n$ 通り，2回目は、1回目で選ばれた以外の $n-2$ 種の数字から選ぶので、$({}_{2n}C_2 - n) \cdot {}_{2n-4}C_2 = 2n(n-1)(n-2)(2n-5)$ //

(3) 余事象を考え、(1), (2) 以外のとき共通の数字が存在するので

$$1 - \frac{n(n-1)(2n-3) + 2n(n-1)(n-2)(2n-5)}{({}_{2n}C_2)^2}$$

$$= \frac{16n^2-32n+17}{n(2n-1)^2} \quad //$$

$\boxed{3}$

座標平面上で、点 $\mathrm{H}(0, 2\sqrt{2})$ から楕円 $C : x^2 + 2y^2 = 8$ へ引いた 2 つの接線を L_1, L_2 とし、L_1, L_2 と C との共有点をそれぞれ $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ とする。ただし、P_1 の x 座標は正であるとする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 L_1 と L_2 それぞれの傾きを求めよ。

(2) 2 点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ を通る直線を L_3 とする。直線 L_3 と楕円 C で囲まれた 2 つの部分のうち、直線 L_3 の上側にある方の面積を求めよ。

(1) 直線と楕円が接する時、交点が重解となることを用いる。

点H $(0, 2\sqrt{2})$ を通り、傾き m の直線を $y = mx + 2\sqrt{2}$ とおき、

これが楕円に接するための条件を求める。

$x^2 + 2y^2 = 8$ に代入すると、

$x^2 + 2(mx + 2\sqrt{2})^2 = 8$

となり、展開すると

$(1+2m^2)x^2 + 8\sqrt{2}mx + 8 = 0$

この二次方程式の判別式 D が 0 となるので、

$$\frac{D}{32} = 4m^2 - (1+2m^2)$$
$$= 2m^2 - 1$$
$$= 0 \qquad \therefore m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

L_1 の傾きは負、L_2 の傾きは正であるため、$\underline{L_1 : -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad L_2 : \frac{\sqrt{2}}{2}}$

(2)

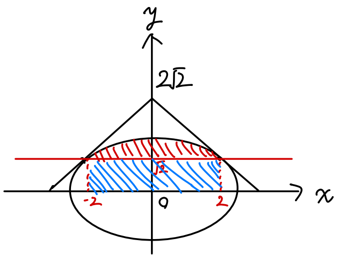
$m = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ を代入して、接点の x 座標を求める。

$2x^2 \pm 8x + 8 = 0$

$2(x \pm 2)^2 = 0 \qquad \therefore x = -2, 2$

よって求める面積は、

$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx - \boxed{4\sqrt{2}}$



$x = 2\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと、$\frac{dx}{d\theta} = 2\sqrt{2}\cos\theta$ より、

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-2}^{2}\sqrt{8-x^2}\,dx = 4\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta = 2\sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos 2\theta + 1)\,d\theta$$
$$= 2\sqrt{2}\left[\frac{\sin 2\theta}{2} + \theta\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}\pi + 2\sqrt{2}$$

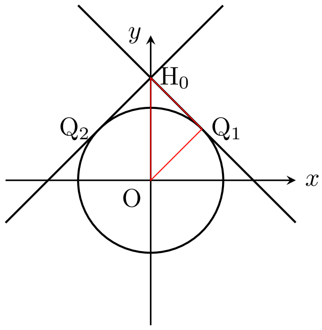
よって $\underline{\sqrt{2}(\pi - 2)}$

$$x^2+2y^2=8 \iff \frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{4}=1.$$

C は単位円を x 軸方向に $2\sqrt{2}$ 倍し, y 軸方向に 2 倍してできる楕円。

$$f(x,y)=\begin{pmatrix}2\sqrt{2}x\\2y\end{pmatrix}\quad((x,y)\in\mathbb{R}^2)$$

とすると, $f(x,y)=\mathrm{H}$ となるのは, $(x,y)=(0,\sqrt{2})=:\mathrm{H}_0$ のときである。点 Q_i を $\mathrm{P}_i=f(\mathrm{Q}_i)\quad(i=1,2)$ で定める。 $\triangle\mathrm{OH}_0\mathrm{Q}_i$ が直角二等辺三角形であることに着目すると, 直線 $\mathrm{H}_0\mathrm{Q}_i$ の傾きは $(-1)^i$ である。よって, L_1, L_2 の傾きはそれぞれ, $-\frac{2}{2\sqrt{2}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}$.



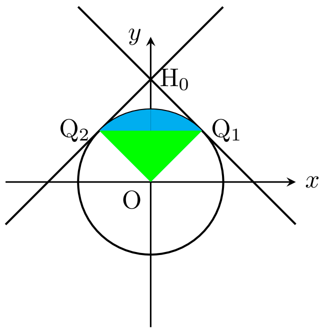
(2)

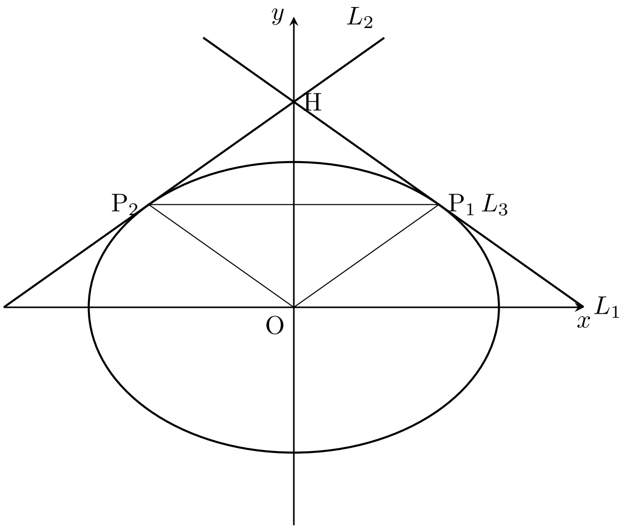
$$\triangle\mathrm{OQ}_1\mathrm{Q}_2\text{の面積}=\frac{1}{2},$$

$$\text{扇形 }\mathrm{OQ}_1\mathrm{Q}_2\text{の面積}=\frac{\pi}{4}$$

だから

$$\text{図の水色部分の面積}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$





求める面積 $= 2\sqrt{2}\cdot 2$ 図の水色部分の面積 $= \sqrt{2}(\pi - 2)$

4

k を実数とする。曲線 $C : y = (x^3 - x + 2)e^{-x}$ と直線 $y = k$ との共有点の個数を $f(k)$ で表す。次の問いに答えよ。ただし、必要ならば自然数 n に対し $\lim_{x\to\infty} x^n e^{-x} = 0$ が成り立つことは証明なしに用いてよい。

(1) k が実数全体を動くとき、$f(k)$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $f(k) = 2$ を満たす k の値の範囲を求めよ。

(3) α を正の実数とする。曲線 C, x 軸, y 軸, および直線 $x = \alpha$ で囲まれる部分の面積を α を用いて表せ。

(1)

まず、関数 $(x^3-x+2)e^{-x}$ の振る舞いを調べる。

$y' = e^{-x}(-x^3+3x^2+x-3)$

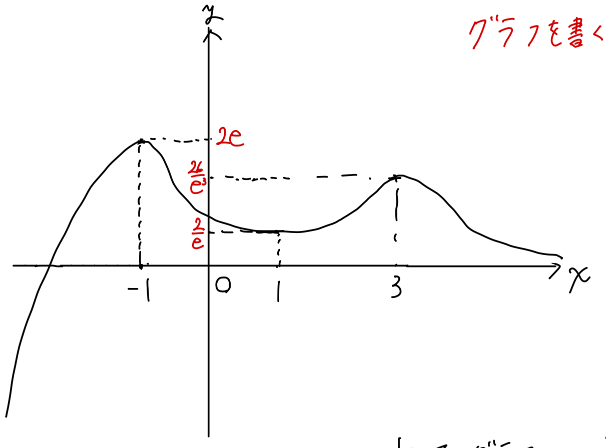
$= -e^{-x}(x+1)(x-1)(x-3)$

$\therefore y'=0$ の解は $x=-1, 1, 3$

増減表は下のようになる。

		-1	$\cdots$	1	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\nearrow$	$2e$	$\searrow$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	$\frac{26}{e^3}$	$\searrow$

このとき、グラフは、下のようになる。



グラフを書く時は、軸の名前と原点を書き忘れない！

よってグラフより、最大値 4　最小値 0

(2) 上のグラフより $f(k)=2$ の時の k の値は、$0<k<\frac{2}{e}$　$\frac{26}{e^3}<k<2e$

(3) 部分積分を繰り返す！

まず、求める面積は $\int_0^\alpha (x^3-x+2)e^{-x}dx$ と表せる。

$$\begin{aligned}\int_0^\alpha (x^3-x+2)e^{-x}dx &= \left[(x^3-x+2)\cdot -e^{-x}\right]_0^\alpha - \int_0^\alpha (3x^2-1)\cdot -e^{-x}dx \\ &= \left[(-x^3+x-2)e^{-x}-(3x^2-1)e^{-x}\right]_0^\alpha + \int_0^\alpha 6xe^{-x}dx \\ &= \left[(-x^3-3x^2+x-1)e^{-x}-6xe^{-x}\right]_0^\alpha + \int_0^\alpha 6e^{-x}dx \\ &= \left[(-x^3-3x^2-5x-7)e^{-x}\right]_0^\alpha \\ &= \underline{(-\alpha^3-3\alpha^2-5\alpha-7)e^{-\alpha}+7}\end{aligned}$$

部分積分