ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

早稲田大学

商学部

2025年2月21日

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

1

以下の空欄にあてはまる数または式を記述解答用紙の所定欄に記入せよ。

(1) 正の実数 a に対して、円 $x^2+(y-a)^2=a^2$ と曲線 $y=x^3$ がちょうど 2 つの共有点をもつとき、$a=$ $\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) 数列 $\{a_n\}$ が次の条件を満たしている。

$$a_1=a_{2025}=0,\quad a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=-1\quad (n=2,3,4,\ldots)$$

このとき、一般項 a_n は $a_n=$ $\boxed{\text{イ}}$ である。

(3) m,n を正の整数とする。n 次関数 $f(x)$ が次の等式を満たしているとき、$f(x)=$ $\boxed{\text{ウ}}$ である。

$$\int_0^x \{f(t)\}^{m-1}dt=(2x)^m f(x)$$

(4) P を平面上の正九角形とする。P の異なる 2 つの頂点を通る直線をすべて考える。これら 36 本の直線のうちの 3 本により平面上で囲まれてできる正三角形の総数は $\boxed{\text{エ}}$ である。ただし、互いに合同でも位置の異なるものは異なる正三角形として数える。

2

a,b を実数とする。座標平面上の点 $\mathrm{P}_1,\mathrm{P}_2,\mathrm{P}_3,\ldots$ は以下の条件を満たしているとする。すべての正の奇数 n に対して、P_n と P_{n+1} は x 軸に関して対称な位置にある。ただし、P_n が x 軸上にあるときは $\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_{n+1}$ であるとする。また、すべての正の偶数 n に対して、P_n と P_{n+1} は直線 $y=ax+b$ に関して対称な位置にある。ただし、P_n が直線 $y=ax+b$ 上にあるときは $\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_{n+1}$ であるとする。

次の設問に答えよ。

(1) $a=0,\ b=1,\ \mathrm{P}_1(0,0)$ であるとき、P_{2025} の座標を求めよ。

(2) $a=1,\ b=0,\ \mathrm{P}_1(2,1)$ であるとき、P_{2025} の座標を求めよ。

(3) $a=\sqrt{3},\ b=0,\ \mathrm{P}_1(1,1)$ であるとする。m,n を正の整数とする。P_m と P_n の距離の最大値を求めよ。

$\boxed{3}$

空間内の異なる 4 点 A, B, C, D が $AD = BC = 2$, $AB = CD = 1$ を満たし、線分 AD と線分 BC が点 P のみで交わり、P は AD と BC をそれぞれ

$$AP : PD = s : (1-s), \quad BP : PC = t : (1-t) \quad (0 < s < 1, 0 < t < 1)$$

に内分しているとする。次の設問に答えよ。

(1) s を t を用いて表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 直線 BC を軸にして △ABP を 1 回転させるとき、△ABP の辺と内部が通過する部分の体積を V とする。V の最大値を求めよ。

(1) 正の実数 a に対して、円 $x^2+(y-a)^2=a^2$ と曲線 $y=x^3$ がちょうど 2 つの共有点をもつとき、$a=\boxed{\text{ア}}$ である。

(2) 数列 $\{a_n\}$ が次の条件を満たしている。

$$a_1=a_{2025}=0,\quad a_{n+1}-2a_n+a_{n-1}=-1\quad (n=2,3,4,\ldots)$$

このとき、一般項 a_n は $a_n=\boxed{\text{イ}}$ である。

(1) 与えられた円 $x^2+(y-a)^2=a^2$ と、$y=x^3$ が ちょうど2点で交わるような
正のaを求めるには、yを消去して $x^2+(x^3-a)^2=a^2$ の解の個数で考える。

左辺を展開すると、

$x^2+x^6-2ax^3+a^2=a^2 \Leftrightarrow x^2(1+x^4-2ax)=0$

すると.求める条件は.$x^4-2ax+1=0$ が、ただ1つの実数解をもつことである。

$f(x)=x^4-2ax+1$ とおくと、

$f'(x)=4x^3-2a$

より、$f(x)$ の増減表は下のようになる。

x	$\cdots$	$\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗

よって求める条件は.$f\left(\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{3}{2}a\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{4}{3}}=\frac{1}{3}$ $\therefore\ a=2\cdot 3^{-\frac{3}{4}}$

(2) 差分の数列を定義して用いる。

$d_n=a_{n+1}-a_n$ とすると、

$d_{n+1}-d_n=a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n$

$=-1$

よって $d_n=d_1+(n-1)\cdot -1$

$=d_1-(n-1)$

ここで. $a_n-a_1=(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots(a_n-a_{n-1})=\sum_{k=1}^{n-1}d_k$

$a_1=0$ より.

$a_n=\sum_{k=1}^{n-1}d_k=\sum_{k=1}^{n-1}[d_1-(k-1)]=(n-1)d_1-\frac{(n-1)(n-2)}{2}$

$a_{2025}=0$ より $d_1=\frac{2023}{2}$

これを代入すると

$a_n=(n-1)\frac{2023}{2}-\frac{(n-1)(n-2)}{2}=\frac{1}{2}(n-1)(2025-n)$

(3) m, n を正の整数とする。n 次関数 $f(x)$ が次の等式を満たしているとき、$f(x) =$ $\boxed{ウ}$ である。

$$\int_0^x \{f(t)\}^{m-1} dt = (2x)^m f(x)$$

与式の左辺は $n(m-1)+1$ 次，右辺は $m+n$ 次より

$n(m-1)+1 = m+n \iff (n-1)(m-2)=1$

$n, m \in \mathbb{N}$ より $(n, m) = (3, 2)$

よって $f(x) = ax^2+bx+c$ とおくと

$$(\text{左辺}) = \int_0^x (at^2+bt+c)^2 dt = \frac{a^2}{5}x^5 + \frac{ab}{2}x^4 + \frac{b^2+2ac}{3}x^3 + bcx^2 + c^2x$$

$$(\text{右辺}) = 8ax^5 + 8bx^4 + 8cx^3$$

よって係数を比較して、$a=40$，$b=0$，$c=0$ より

$f(x) = 40x^2$ //

(4) P を平面上の正九角形とする。P の異なる 2 つの頂点を通る直線をすべて考える。これら 36 本の直線のうちの 3 本により平面上で囲まれてできる正三角形の総数は $\boxed{エ}$ である。ただし、互いに合同でも位置の異なるものは異なる正三角形として数える。

36本の直線は、傾きに注目すると、9種類の傾きの直線が4本づつとなっている。
正三角形を成す3本の種類の選び方は3通りあり、
それぞれ4本から1本づつ選ぶので、$3 \times 4^3 = 192$通り //

2

a, b を実数とする。座標平面上の点 $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \mathrm{P}_3, \ldots$ は以下の条件を満たしているとする。すべての正の奇数 n に対して、P_n と P_{n+1} は x 軸に関して対称な位置にある。ただし、P_n が x 軸上にあるときは $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_{n+1}$ であるとする。また、すべての正の偶数 n に対して、P_n と P_{n+1} は直線 $y = ax + b$ に関して対称な位置にある。ただし、P_n が直線 $y = ax + b$ 上にあるときは $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_{n+1}$ であるとする。

次の設問に答えよ。

(1) $a = 0,\ b = 1,\ \mathrm{P}_1(0, 0)$ であるとき、P_{2025} の座標を求めよ。

(2) $a = 1,\ b = 0,\ \mathrm{P}_1(2, 1)$ であるとき、P_{2025} の座標を求めよ。

(3) $a = \sqrt{3},\ b = 0,\ \mathrm{P}_1(1, 1)$ であるとする。m, n を正の整数とする。P_m と P_n の距離の最大値を求めよ。

何らかの規則に従って動くと予想する!!

(1)

奇数番目では x軸対称 $(x, y) \mapsto (x, -y)$

偶数番目では $y=1$ に関して対称 $(x, y) \mapsto (x, 2-y)$

よって、P_n (nは奇数) を (a, b) とすると、P_{n+1} $(a, -b)$　P_{n+2} $(a, b+2)$

よって、$P_n \to P_{n+2}$ で $(a, b) \to (a, b+2)$

となる。

$\therefore\ P_{2025} = (0, 2024)$

(2)

奇数番目では、x軸対称 $(x, y) \mapsto (x, -y)$

偶数番目では、$y=x$ に関する対称 $(x, y) \mapsto (y, x)$

順に求めると、下のようになることから周期8で動くことがわかる。

$P_1\ (2, 1)$　$P_2\ (2, -1)$　$P_3\ (-1, 2)$　$P_4\ (-1, -2)$

$P_5\ (-2, -1)$　$P_6\ (-2, 1)$　$P_7\ (1, -2)$　$P_8\ (1, 2)$　$P_9\ (2, 1)$

よって $P_{2025} = P_1 = (2, 1)$

(3)

奇数番目では x軸対称。

偶数番目では $y=\sqrt{3}x$ に関する対称。

よって順に求めると、下のようになることから周期6で動くことがわかる。

$P_1\ (1, 1)$　$P_2\ (1, -1)$　$P_3\ \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$

$P_4\ \left(-\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$　$P_5\ \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, -\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$　$P_6\ \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right)$　$P_7\ (1, 1)$

以上6点のキョリを調べると、その最大値は $1+\sqrt{3}$

$\boxed{3}$

空間内の異なる 4 点 A, B, C, D が $AD = BC = 2,\ AB = CD = 1$ を満たし、線分 AD と線分 BC が点 P のみで交わり、P は AD と BC をそれぞれ

$$AP : PD = s : (1-s), \quad BP : PC = t : (1-t) \quad (0 < s < 1,\ 0 < t < 1)$$

に内分しているとする。次の設問に答えよ。

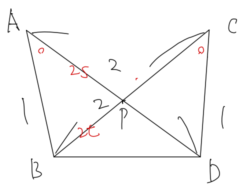
(1) s を t を用いて表せ。

(2) t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 直線 BC を軸にして △ABP を 1 回転させるとき、△ABP の辺と内部が通過する部分の体積を V とする。V の最大値を求めよ。

(1) AD, BCが交わることから，4点は同一平面上に存在．

図は次のよう。ここで，$\triangle ABD$ と $\triangle CDB$ は 3辺が等しいため合同．



よって $\angle BAP = \angle PCD$ …①

対頂角は等しいので，$\angle APB = \angle CPB$ …②

①，②，$AB = CD$ より $\triangle APB \equiv \triangle CPD$

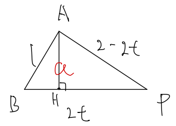
ここで，条件から，$AP = 2s$，$PC = 2 - 2t$ より

$2s = 2 - 2t \quad \therefore\ s = 1 - t$ //

(2) △APBの成立条件から，
$$\begin{cases} 2s + 2t > 1 \\ 2s + 1 > 2t \\ 2t + 1 > 2s \end{cases}$$
$s = 1 - t$ を代入し，
$$\begin{cases} 2 > 1 \\ 3 > 4t \\ 4t > 1 \end{cases}$$

以上より $\frac{1}{4} < t < \frac{3}{4}$ //

(3)



AからBPに下ろした垂線の足をH，AH = a とすると，

三辺方の定理から，

$$\sqrt{1-a^2} + \sqrt{4(1-t)^2 - a^2} = 2t$$

変形して． $\cancel{4t^2} - 8t + 4 \cancel{- a^2} = \cancel{4t^2} + 1 \cancel{- a^2} - 4t\sqrt{1-a^2}$

整理すると． $(3-8t)^2 = 16t^2(1-a^2)$

$$\therefore\ a^2 = 1 - \frac{(3-8t)^2}{16t^2}$$

$$\therefore\ V = \frac{1}{3}\pi a^2 2t = \frac{2\pi}{3}\left(t - \frac{64t^2-48t+9}{16t}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{3}\left(3 - 3t - \frac{9}{16t}\right)$$

相加相乗平均の関係から、 $3t + \frac{9}{16t} \geqq 2\sqrt{\frac{27}{16}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ (等号は $t = \frac{\sqrt{3}}{4}$ で成立)

(2)をみたす。

よって V の max は、 $\frac{2\pi}{3}\left(3 - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = \pi(2-\sqrt{3})$ //