ゴウカライズ
数学
2025
大学入試 解答速報

杏林大学 医学部

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

I

i を虚数単位とする。整式 $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1$ について、以下の問いに答えよ。

(a)　定数 k に対し、4 次方程式 $f(x) = k$ が異なる 4 つの実数解をもつのは、$k_1 < k < k_2$ のときである。

ただし、$k_1 = \dfrac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウエ}}}$，　$k_2 = \boxed{\text{オ}}$ である。

4 次方程式 $f(x) = k_1$ は異なる 3 つの実数解をもち、このうち重解以外の 2 つの解の和は $\dfrac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ である。

(b)　$x = \sqrt{2}i - 1$ は 2 次方程式

$g(x) = x^2 + \boxed{\text{ケ}}\,x + \boxed{\text{コ}} = 0$ の解であり、

$f(x)$ を 2 次式 $g(x)$ で割った余りは

$\boxed{\text{サシ}}\,x + \boxed{\text{スセ}}$　である。したがって、

$$f(\sqrt{2}i - 1) = -\boxed{\text{ソ}} + \boxed{\text{サシ}}\sqrt{2}i$$

となる。

(c)　曲線 $y = f(x)$ と直線 $y = ax + b$ が異なる 2 点で接するとき、接点の x 座標を α, β として

$$f(x) - (ax + b) = 3(x - \alpha)^2(x - \beta)^2$$

と表すことができる。両辺の x の各次数の係数を比較することで

$$\alpha + \beta = -\frac{\boxed{\text{タ}}}{\boxed{\text{チ}}},\quad \alpha\beta = -\frac{\boxed{\text{ツ}}}{\boxed{\text{テ}}}$$

であることがわかり、

$$a = \frac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}},\quad b = \frac{\boxed{\text{ヌ}}}{\boxed{\text{ネノ}}}$$

となる。

(1)（前半）

Point

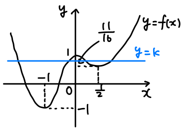
$y = f(x)$ のグラフと直線 $y = k$ の共有点の個数を調べればよい.

$f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1$

$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 6x$

$\quad = 6x(2x-1)(x+1)$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{11}{16}$	$\nearrow$



$f(x) = k$ が異なる4実解をもつ, すなわち, $y = f(x)$ と $y = k$ が共有点を4個もつのは

$\frac{11}{16} < k < 1$　のとき

(1)（後半）

Point

接点で重解となるので, $f(x) - k_1$ は $(x - \frac{1}{2})^2$ を因数にもつ

$f(x) - k_1 = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + \frac{5}{16}$

$\quad = (x - \frac{1}{2})^2(3x^2 + 5x + \frac{5}{4})$

より, 重解以外の2つの解を α, β とおくと, これらは $3x^2 + 5x + \frac{5}{4} = 0$ の解であり, 解と係数の関係より

$\alpha + \beta = -\frac{5}{3}$

(2)（前半）

Point

$x = \sqrt{2}i - 1$ のとき　$x + 1 = \sqrt{2}i$, 2乗して $(x+1)^2 = (\sqrt{2}i)^2$ が成り立つ. 整理すると,

$x = \sqrt{2}i - 1$　のとき　$x^2 + 2x + 3 = 0$ が成り立つ

ということになるが, 定義より, これは $x = \sqrt{2}i - 1$ が $x^2 + 2x + 3 = 0$ の解であることを意味する.

$x = \sqrt{2}i - 1$ より　$x + 1 = \sqrt{2}i$. 2乗して整理して $x^2 + 2x + 3 = 0$ となるので, $x = \sqrt{2}i - 1$ は

$g(x) = x^2 + 2x + 3 = 0$　の解である.

〈別解〉

Point

実数係数の方程式が虚数解をもつとき, その共役複素数も解にもつことを利用

$\alpha = -1 + \sqrt{2}i$ を解にもつ実数係数の2次方程式は $\beta = -1 - \sqrt{2}i$ も解にもち,

$\alpha + \beta = -2$,　$\alpha\beta = 3$

より, 解と係数の関係から,

$g(x) = x^2 + 2x + 3$

(2)（後半）

2次式で割った余りは1次以下なので

$f(x) = g(x)Q(x) + ax + b$

とおけて, $g(\sqrt{2}i - 1) = 0$ であることを利用して両辺に $x = \sqrt{2}i - 1$ を代入したり, $x = \sqrt{2}i - 1$ のとき $x^2 = -2x - 3$ であることを利用して $f(x)$ に次数下げをすることで余りを求めることもできるが, 今回は普通に割り算を実行してしまった方がはやいし, 問題の流れをみても, 余りを求めさせたあとで $g(\sqrt{2}i - 1) = 0$ を使うことになるので, 計算してしまえばよい.

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 3 & -4 & -4 & & \\
1\ 2\ 3 & 3 & 2 & -3 & 0 & 1 \\
 & 3 & 6 & 9 & & \\
\hline
 & & -4 & -12 & 0 & 1 \\
 & & -4 & -8 & -12 & \\
\hline
 & & & -4 & 12 & 1 \\
 & & & -4 & -8 & -12 \\
\hline
 & & & & 20 & 13
\end{array}$$

割り算を実行して

$3x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 1$

$= \underbrace{(x^2 + 2x + 3)}_{= g(x)}(3x^2 - 4x - 4) + 20x + 13$

$g(\sqrt{2}i - 1) = 0$ より

$f(\sqrt{2}i - 1) = 20(\sqrt{2}i - 1) + 13 = -7 + 20\sqrt{2}i$

(3)

Point

4次方程式の解と係数の関係

$ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ $(a \neq 0)$ の解が $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ であるとき

$\alpha + \beta + \gamma + \delta = -\frac{b}{a}$

$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = \frac{c}{a}$

$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = -\frac{d}{a}$

$\alpha\beta\gamma\delta = \frac{e}{a}$

が成り立つ

これを利用すると見通しよく計算できる

$f(x) - ax + b = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2 - ax - b + 1$ の解が $\alpha, \alpha, \beta, \beta$ なので

$\alpha + \alpha + \beta + \beta = 2(\alpha + \beta) = -\frac{2}{3}$　　$\therefore\ \alpha + \beta = -\frac{1}{3}$

$\alpha\cdot\alpha + \alpha\beta + \alpha\beta + \alpha\beta + \alpha\beta + \beta\cdot\beta = (\alpha + \beta)^2 + 2\alpha\beta = -\frac{3}{3}$

$\therefore\ (-\frac{1}{3})^2 + 2\alpha\beta = -1$　　$\therefore\ \alpha\beta = -\frac{5}{9}$

$\alpha\cdot\alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\alpha\cdot\beta + \alpha\cdot\beta\cdot\beta + \alpha\cdot\beta\cdot\beta = 2\alpha\beta(\alpha + \beta) = \frac{a}{3}$

$\therefore\ 2\cdot(-\frac{5}{9})\cdot(-\frac{1}{3}) = \frac{a}{3}$　　$\therefore\ a = \frac{10}{9}$

$\alpha\cdot\alpha\cdot\beta\cdot\beta = (\alpha\beta)^2 = \frac{-b+1}{3}$

$\therefore\ (-\frac{5}{9})^2 = \frac{-b+1}{3}$　　$\therefore\ b = \frac{2}{27}$

II

定数 a, b に対し、関数 $f(x)$ を次の式で定義する。

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{ax+b}{\sqrt{x^2+9}} & (x \geqq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{(3-2x)\sin 2x}{6x\cos x} & (x < 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

関数 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であるとして、以下の問いに答えよ。

(a) $-\dfrac{\pi}{2} < x < 0$ のとき $\tan x < x < \sin x$ が成り立つことを利用すると、

$$\lim_{x\to -0} \frac{x - \sin x}{x^2} = \boxed{\text{ア}}$$

となることがわかる。

(b) $\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x) = \frac{b}{\boxed{\text{イ}}}$ であり、$\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x) = \boxed{\text{ウ}}$ であるので、関数 $f(x)$ が $x=0$ で連続であることから、$b = \boxed{\text{エ}}$ とわかる。また、$\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x) = \frac{a}{\boxed{\text{オ}}}$ であり、設問 (a) の結果を利用すると、$\displaystyle\lim_{x\to-0} f'(x) = \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ となるので、関数 $f(x)$ が $x=0$ で微分可能であることから、$a = \boxed{\text{ケコ}}$ と定まる。

(c) 曲線 $y=f(x)$ の $x=0$ における接線の式は

$$y = \frac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}x + \boxed{\text{セ}}$$

である。この接線と曲線 $y=f(x)$ の交点のうち、$x>0$ を満たす点の x 座標を u とする。$u = \dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{\boxed{\text{タ}}}$ であり、

$$\int_0^u f(x)dx = \boxed{\text{チ}} - \boxed{\text{ツ}}\sqrt{\boxed{\text{テ}}} + \boxed{\text{ト}}\log_e \frac{\boxed{\text{ナ}} + \sqrt{\boxed{\text{ニ}}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

が成り立つ。ただし、e は自然対数の底である。

- 穴埋めの数字が分かれば十分.
- 意味を追跡できない複雑な計算をした結果, 途中のミスに気付けず数値を外してしまったら元も子もない.
- 今回のセットだとまともにやると試験時間内に解ききるのはかなり難しいので, 多少のアラはあっても速く答えが出せれば得点の期待値は高まる.

といった事情を考慮すると, 丁寧な数学の論証としての解答は, 試験会場で受験生がやることからはかけ離れているので, 受験生に本当に役立つ解答速報をつくるという観点から, 以下の解答では, 数学的な論証を一部犠牲にしてでも, 答えを速く正確に出せる方法を本解にして, 数学的な解答は補足としてつけることにした.

(1)

Point

マクローリン展開による高次項も残した近似式

$$\sin x \approx x - \frac{x^3}{3!}$$
$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2!}\left(+\frac{x^4}{4!}\right)$$
$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!}\left(+\frac{x^3}{3!}\right)$$
$$\log(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2}\left(+\frac{x^3}{3}\right)$$

を用いると, 極限値はすぐに分かることがある.

(解答)

$\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$ より

$$\frac{x - \sin x}{x^2} \approx \frac{\frac{x^3}{6}}{x^2} = \frac{x}{6} \xrightarrow[x\to-0]{} 0$$

このように一瞬で終わる!

〈※1〉お気持ち的には…

分子の方が分母以上の速さで0に向かうことが分かれば嬉しいので, $x - \sin x$ を2次以上の式で近似できれば勝ち

〈※2〉この解き方の根拠

マクローリンの定理から　$x<0$ のとき

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} < \sin x < x - \frac{x^3}{6} \quad \cdots (*)$$

が成り立つので,

$$\frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6}\right)}{x^2} < \frac{x - \sin x}{x^2} < \frac{x - \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)}{x^2}$$

が成り立ち, はさみうちの原理から極限値が求まる

〈※3〉入試でよく見る(＊)のような不等式証明

入試問題で(＊)のような不等式を示させる問題はよく出るが, こういった不等式はマクローリンの定理を元に作られており, マクローリンの定理は展開する次数についてロルの定理(平均値の定理)を用いることで示されるので, こういった不等式は, 繰り返し微分をすることで示せる構造になっている.

〈普通の数学的解答〉

$-\frac{\pi}{2} < x < 0$ のとき $\tan x < x < \sin x$ の辺々から $\sin x$ を引いて $\tan x - \sin x < x - \sin x < 0$ を得るので,

$x^2 > 0$ より $\dfrac{\tan x - \sin x}{x^2} < \dfrac{x - \sin x}{x^2} < 0$

$$\frac{\tan x - \sin x}{x^2} = \tan x \cdot \frac{1 - \cos x}{x} \xrightarrow[x\to-0]{} 0 \cdot \frac{1}{2} = 0$$

より, はさみうちの原理から, $\displaystyle\lim_{x\to-0} \frac{x - \sin x}{x^2} = 0$

(2) (前半)

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{ax+b}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{b}{3}$$

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} \frac{\sin 2x}{2x} \cdot \frac{3-2x}{3\cos x} = 1 \cdot \frac{3-0}{3\cdot 1} = 1$$

$f(x)$ は $x=0$ で連続より $\dfrac{b}{3} = 1$　∴ $b=3$

(後半)

Point

$\displaystyle\lim_{x\to+0} f'(x)$ の値を知るには, 原点付近での傾きが分かればよい.

(解答)

$\dfrac{a}{\sqrt{x^2+9}}x$ は $x \approx 0$ のとき $\dfrac{a}{3}x$ とみなせるので

$$\lim_{x\to+0} f'(x) = \frac{a}{3}$$

〈※4〉具体的イメージ

$x = 0.01$ のとき $\dfrac{a}{\sqrt{x^2+9}}x = \dfrac{a}{\sqrt{9.0001}} \cdot 0.01 \approx \dfrac{a}{3} \cdot 0.01$

$x = 0.02$ のとき $\dfrac{a}{\sqrt{x^2+9}}x = \dfrac{a}{\sqrt{9.0004}} \cdot 0.02 \approx \dfrac{a}{3} \cdot 0.02$

このように, x がとても小さいとき, 定数と和や差になっている x は無視できるが, 積や商の関係のものは無視できない

〈普通の数学的解答〉

$x \geqq 0$ のとき

$$f'(x) = \frac{a}{\sqrt{x^2+9}} - \frac{(ax+b)\cdot\cancel{2}x}{\cancel{2}(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{ax^2 + 9a - ax^2 + bx}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$$
$$= \frac{9a - bx}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}} = \frac{3(3a - x)}{(x^2+9)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\therefore \lim_{x\to+0} f'(x) = \frac{3\cdot 3a}{9^{\frac{3}{2}}} = \frac{a}{3}$$

$x < 0$ のとき

$$f(x) = \frac{(3-2x)\cdot\cancel{2}\sin x\cancel{\cos x}}{3\cancel{6}x\cancel{\cos x}} = \frac{\sin x}{x} - \frac{2}{3}\sin x$$

$y = \dfrac{\sin x}{x}$ は y 軸対称で, $x=0$ でなめらかに連続な関数であったことを思い出すと, $x \approx 0$ では $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)' \approx 0$ と分かるので,

$x \approx 0$ のとき　$f'(x) \approx -\dfrac{2}{3}\cos 0 = -\dfrac{2}{3}$

〈※5〉誘導を用いて $\dfrac{\sin x}{x}$ の導関数の極限を調べる

$g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ とおくと

$$g'(x) = \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$
$$= \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}$$
$$= \frac{x(\cos x - 1) + x - \sin x}{x^2}$$
$$= -x \cdot \underbrace{\frac{1 - \cos x}{x^2}}_{\to \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{x - \sin x}{x^2}}_{\xrightarrow{(1)} 0}$$
$$\xrightarrow[x\to-0]{} -0 \cdot \frac{1}{2} + 0 = 0$$

(問題の流れを信じて)

$f(x)$ が $x=0$ で微分可能 より $\frac{a}{3}=-\frac{2}{3}$

$\therefore\ a=-2$

〈※6〉ちゃんと正当化するなら

Point

$f(x)$ が $[0,h]$ $([h,0])$ で連続，$(0,h)$ $((h,0))$ で微分可能ならば $\frac{f(h)-f(0)}{h}=f'(c)$ なる c は 0 と h の間に存在し，$h\to+0$ (-0) のとき $c\to+0$ (-0) ゆえ，$\lim_{c\to+0\,(c\to-0)} f'(c)$ の値が存在するならば，$\lim_{h\to+0\,(h\to-0)}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{c\to+0\,(c\to-0)}f'(c)$ である.

$\lim_{x\to+0}f'(x)=\frac{a}{3}$ より $\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{a}{3}$

$\lim_{x\to-0}f'(x)=-\frac{2}{3}$ より $\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=-\frac{2}{3}$

$f(x)$ が $x=0$ で微分可能ならば

$$\lim_{h\to+0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to-0}\frac{f(h)-f(0)}{h}$$

であることより，$\frac{a}{3}=-\frac{2}{3}$ すなわち $a=-2$

〈※7〉"あたりまえ"の感覚の正当化には平均値の定理

感覚的には，$\lim_{x\to+0}f'(x)=\frac{a}{3}$，$\lim_{x\to-0}f'(x)=-\frac{2}{3}$ なのだから，$f(x)$ が $x=0$ で微分可能なら $\frac{a}{3}$ と $-\frac{2}{3}$ が一致していないとおかしいと思えるが，このような極限の挙動の"あたりまえ"の感覚を論証に乗せるときはしばしば平均値の定理が有効である.

〈※8〉$f(x)$ は $x=0$ で微分可能 $\Rightarrow$ $f'(x)$ は $x=0$ で連続 は一般には成り立たない

(反例)　$f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$

$$\frac{f(h)-f(0)}{h}=\frac{h^2\sin\frac{1}{h}-0}{h}=h\sin\frac{1}{h}$$

$0\leqq\left|\sin\frac{1}{h}\right|\leqq1$ より $0\leqq\left|h\sin\frac{1}{h}\right|\leqq|h|$ で $|h|\xrightarrow[h\to0]{}0$ だから

$\lim_{h\to0}\frac{f(h)-f(0)}{h}=0$，すなわち $x=0$ での $f(x)$ の微分係数は存在する($f(x)$ は $x=0$ で微分可能である)と分かる.

一方で，

$$f'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$$

について，$2x\sin\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to0]{}0$ ではあるが，$\cos\frac{1}{x}$ は $x\to0$ において収束しない(振動する)ので，

$\lim_{x\to0}f'(x)\neq f'(0)$ である($f'(x)$ は $x=0$ で連続ではない)

※ 大澤裕一氏(@HirokazuOHSAWA)の note 記事を参考にさせていただきました.

(3) (前半)

$f'(0)=-\frac{2}{3}$，$f(0)=1$ より，$y=f(x)$ の $x=0$ における接線の式は　$y=-\frac{2}{3}x+1$

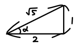
$x>0$ のとき　$\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}}=-\frac{2}{3}x+1$ より

$$(-2x+3)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+9}}-\frac{1}{3}\right)=0$$

で，$\sqrt{x^2+9}>3$ だから，$y=-\frac{2}{3}x+1$ と $y=f(x)$ の $x>0$ における交点の x 座標は $u=\frac{3}{2}$

(後半)

$x=3\tan\theta$ と置換．$\left(\begin{array}{c|c} x & 0\to\frac{3}{2} \\ \hline \theta & 0\to\alpha \end{array}\ ,\ \frac{dx}{d\theta}=\frac{3}{\cos^2\theta}\right)$



$\tan\alpha=\frac{1}{2}$ より $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt5}$，$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt5}$

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}}dx=\int_0^{\alpha}\frac{3(1-2\tan\theta)}{\frac{3}{\cos\theta}}\cdot\frac{3}{\cos^2\theta}d\theta$$

$$=3\int_0^{\alpha}\frac{1-2\tan\theta}{\cos\theta}d\theta$$

$$=3\int_0^{\alpha}\frac{1}{\cos\theta}d\theta-6\int_0^{\alpha}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta$$

ここで，$\frac{1}{\cos\theta}=\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}=\frac{\cos\theta}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)}$ より

$$\int_0^{\alpha}\frac{1}{\cos\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\alpha}\left(\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}+\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\Big[-\log(1-\sin\theta)+\log(1+\sin\theta)\Big]_0^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt5+1}{\sqrt5-1}$$

$$=\frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt5+1}{2}\right)^2$$

$$=\log\frac{\sqrt5+1}{2}$$

また，$\int_0^{\alpha}\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\left[\frac{1}{\cos\theta}\right]_0^{\alpha}=\frac{\sqrt5}{2}-1$

以上より，

$$\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{-2x+3}{\sqrt{x^2+9}}dx=3\log\frac{\sqrt5+1}{2}-6\left(\frac{\sqrt5}{2}-1\right)$$

$$=6-3\sqrt5+3\log\frac{1+\sqrt5}{2}$$

〈別解〉

$\left(\sqrt{x^2+9}\right)'=\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$　であることを利用して

$\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{-2x}{\sqrt{x^2+9}}dx$ を計算し，$t=x+\sqrt{x^2+9}$ と置換

すると $dx=\frac{\sqrt{x^2+9}}{x+\sqrt{x^2+9}}$ となることを利用して

$\int_0^{\frac{3}{2}}\frac{3}{\sqrt{x^2+9}}dx$ の部分を計算してもよい.

III（前半）

座標空間において，x 軸および y 軸からの距離が共に 1 であるような点全体の集合を L とし，L と xy 平面との交点のうち，第 1〜4 象限にある点を順に点 A, B, C, D とする。また，L と z 軸との交点のうち，z 座標が正である点を E, 負である点を F とする。x 軸および y 軸からの距離が共に 1 以下であるような点全体の集合から，八面体 E-ABCD-F の内部を除いてできる立体を K として，以下の問いに答えよ。

(1)　L は原点を中心とする 2 つの楕円からなり，このうち点 A を通る楕円の内部の面積は $\sqrt{\boxed{\text{ア}}}\,\pi$ である。K に属する点のうち，x 軸からの距離が 1 であるような領域の展開図は 2 つの正弦曲線で囲まれた図形であり，その面積は $\boxed{\text{イ}}$ である。

立体 K を $z=t$（ただし，$-1 \leq t \leq 1$）で表される平面で切ってできる断面の面積は $\boxed{\text{ウエ}}\,t^2+\boxed{\text{オ}}\,|t|$ であり，K の体積は $\dfrac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}$ となる。

立体 K を $x=u$（ただし $0<u<1$）で表される平面で切ってできる断面の面積 S は，$u=\cos\theta$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす θ を用いて

$$S=\boxed{\text{ク}}\,\theta+\sin\left(\boxed{\text{ケ}}\,\theta\right)+\cos\left(\boxed{\text{ケ}}\,\theta\right)-\boxed{\text{コ}}$$

と書くことができる。S は $u=\dfrac{\sqrt{\boxed{\text{サ}}}}{\boxed{\text{シ}}}$ のとき最大値 $\dfrac{\pi}{\boxed{\text{ス}}}$ をとる。

(1)

Point

答えを出すだけなら，図形の概形を把握する必要はほとんどないし，曲線の方程式を一般的な形でつくるまでもないことがある．

$\boxed{\text{ア}}$ について

$z=0$ の平面において x 軸，y 軸との距離が 1 である点の集合はそれぞれ $y=\pm1$，$x=\pm1$ の直線だから，

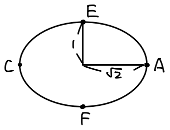
$A(1,1)$, $B(-1,1)$, $C(-1,-1)$, $D(1,-1)$

であり，z 軸上で x 軸および y 軸との距離が 1 となるのは

$E(0,0,1)$，$F(0,0,-1)$

である．

これらのことと対称性から，A を通る楕円は以下のよう．

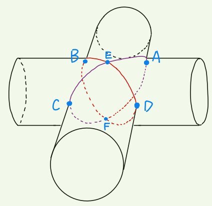


よってその面積は

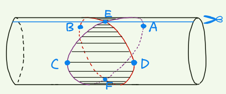
$\sqrt{2}\,\pi$

$\boxed{\text{イ}}$ について

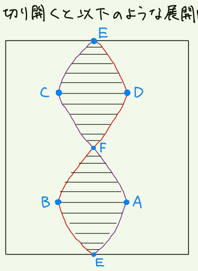
問題文で言っていることが分かりづらいと思われるので，先に説明してしまっておく．



x 軸からの距離が 1 であるような領域は以下のような円柱面で，そのうち y 軸からの距離が 1 以下となるのは 赤 と 紫 の 2 つの曲線で囲まれた部分である．

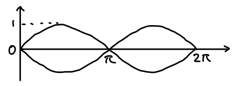


これを切り開くと以下のような展開図となる．



一応，題意の図形がどのように現れるのかを説明したが，答えを出すだけなら以下の考察で十分．

問題文の誘導で，2 つの正弦曲線で囲まれた図形であることは教えてくれているので，境界線は円柱面を 1 周して元に戻ってくることや対称性もふまえると，以下のような領域を考えるのが妥当であり，その面積を知るには横の長さと振幅が分かれば十分．



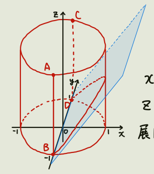
横の長さ　→　半径 1 の円周の長さで 2π

振幅　→　$CD=2$ より 1

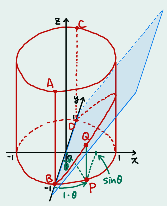
$y=\sin x$ の 1 ヤマの面積は 2 で，求める面積はその 4 個分だから 8 である．

＜※1＞円柱面を斜めに切断するとサインカーブが現れる

（例題）



$x^2+y^2=1$ の円柱面を $z=x$ の平面で切断して展開したときに現れる図形は？

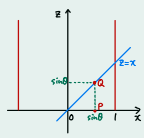


図のように弧 $\overset{\frown}{BD}$ に沿って動く動点 P と，点 P を通る z 軸に平行な直線と平面 $z=x$ との交点 Q を定める．

$\angle POB=\theta$ とおくと，扇形の弧の長さより

$$\overset{\frown}{BP}=1\cdot\theta$$

である．

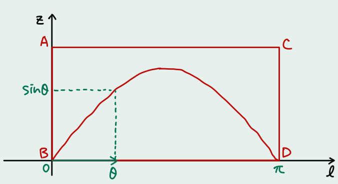


ここで，点 P の x 座標は $\sin\theta$ となることより，xz 平面に射影した図を考えることで，

$$PQ=\sin\theta$$

である．

以上より，側面 ABDC の展開図は以下のよう．



なお，このテーマは 2023 年獨協医科大学などで出題されており，以上の計算の流れは押さえておいて損はない．

ウ ～ キ について

Point

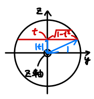
$z=t$ の平面において

- x軸からの距離が 1 以下
- y軸からの距離が 1 以下
- 八面体 E-ABCD-F の境界および外部

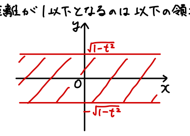
のそれぞれの条件をみたす領域を着実に調べて，それらの共通領域として，断面を求めればよい．

x軸からの距離が 1 以下となる領域

yz平面で考える

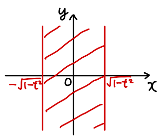


よって，$z=t$ の平面のうち x軸からの距離が 1 以下となるのは 以下の領域

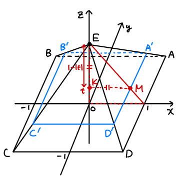


y軸からの距離が 1 以下となる領域

同様に考えて，$z=t$ の平面のうち y軸からの距離が 1 以下となるのは 以下の領域



八面体 E-ABCD-F の境界および外部

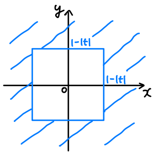


四角錐 E-ABCD の側面と $z=t$ の平面が交わってできる図形は左図の正方形 A'B'C'D' であり，各辺の z軸からの距離は

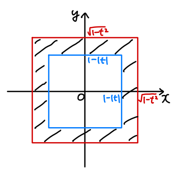
$KM=EK=EO-KO=1-|t|$

である．

よって，$z=t$ の平面のうち八面体 E-ABCD-F の境界および外部は右図のよう



求める断面は以上の共通領域であり，以下の通り．



よって求める面積は

$(2\sqrt{1-t^2})^2-\{2(1-|t|)\}^2$

$=\underline{-8t^2+8|t|}$

である

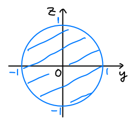
立体 K は xy平面について対称だから，$0 \leqq t \leqq 1$ で体積を計算して 2 倍にすればよい．

$$\frac{V}{2}=\int_0^1(-8t^2+8t)\,dt$$

$$=-8\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}\right]_0^1=\frac{4}{3} \qquad \therefore\ \underline{V=\frac{8}{3}}$$

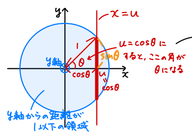
ク ～ ス について

$x=u$ の平面のうち x軸からの距離が 1 となる領域

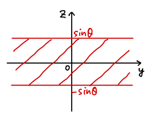


$x=u$ の平面のうち y軸からの距離が 1 となる領域

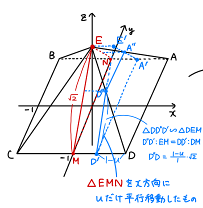
xz平面で考える



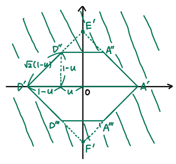
よって，$x=u$ の平面のうち y軸からの距離が 1 以下となるのは 以下の領域



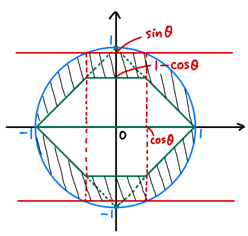
$x=u$ の平面のうち八面体 E-ABCD-F の境界および外部

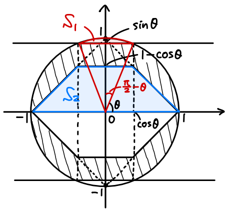


よって，$x=u$ の平面のうち八面体 F-ABCD-E の境界および外部は下図のよう



求める断面は以上の共通領域であり，以下の通り．





求める面積は半径 1 の円の面積から $2(S_1+S_2)$ を引いたものである．

$$S_1=\begin{pmatrix}\text{半径 1, 中心角 } \pi-2\theta \\ \text{の扇形の面積}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{底辺 } 2\cos\theta\text{, 高さ } \sin\theta \\ \text{の三角形の面積}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot2\cos\theta\cdot\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\pi-\theta-\frac{1}{2}\sin2\theta$$

$$S_2=(\text{底辺 } 1+\cos\theta\text{, 高さ } 1-\cos\theta \text{ の長方形の面積})$$

$$=(1+\cos\theta)(1-\cos\theta)$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos2\theta$$

以上より，

$$S=\pi-2(S_1+S_2)$$

$$=\pi-(\pi-2\theta-\sin2\theta+1-\cos2\theta)$$

$$=\underline{2\theta+\sin2\theta+\cos2\theta-1}$$

ここで，

$$\frac{dS}{d\theta}=2+2\cos2\theta-2\sin2\theta$$

$$=2\left\{1-\sqrt{2}\sin\left(2\theta-\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

より，$S(\theta)$ の増減表は以下のよう．

θ	(0)	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$(\frac{\pi}{2})$
$\frac{dS}{d\theta}$		+	0	−	
S		↗	$\frac{\pi}{2}$	↘	

以上より，S は $\theta=\frac{\pi}{4}$ すなわち $\underline{u=\frac{\sqrt{2}}{2}}$ のとき最大値 $\underline{\frac{\pi}{2}}$ をとる．

III（後半）

(2) 八面体 E-ABCD-F の辺を通って 1 秒ごとに隣接する頂点に移動する動点 P を考える。点 P が xy 平面上のいずれかの頂点から 1 秒後に点 E に移動する確率は $\frac{1}{3}$，点 F に移動する確率は $\frac{1}{6}$ であるとし，八面体のいずれかの頂点から 1 秒後に点 E, F 以外の隣接する頂点の 1 つに移動する確率は $\frac{1}{4}$ であるとする。

時刻 $t=0$ において点 E に存在した動点 P が，n 秒後に点 E に存在する確率を p_n，点 F に存在する確率を q_n とすると，自然数 n に対し，

$$p_{n+1} = \frac{\boxed{セ}}{\boxed{ソ}}(1-p_n-q_n),$$

$$q_{n+1} = \frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}(1-p_n-q_n)$$

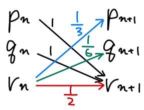
が成り立つ。このとき，動点 P が 4 秒後に点 A に存在する確率は $\frac{\boxed{ツ}}{\boxed{テト}}$ であり，点 F に存在する確率が最も高くなるのは $\boxed{ナ}$ 秒後で，その確率は $\frac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ である。また，

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{\boxed{ネ}}{\boxed{ノ}}$$

が成り立つ。

(2)

n 秒後に動点Pが点A, B, C, Dのいずれかに存在する確率を r_n とおくと，推移の仕方は以下の通り.



よって，$n \geqq 0$ で，$p_n+q_n+r_n=1$ にも注意すると，

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}r_n = \frac{1}{3}(1-p_n-q_n)$$

$$q_{n+1} = \frac{1}{6}r_n = \frac{1}{6}(1-p_n-q_n)$$

$$r_{n+1} = p_n+q_n+\frac{1}{2}r_n = 1-\frac{1}{2}r_n \quad \cdots (*)$$

が成り立つ．ここで，(*) より

$$r_n - \frac{2}{3} = -\frac{1}{2}\left(r_{n-1}-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^n\left(r_0-\frac{2}{3}\right)$$

$$\therefore \quad r_n = \frac{2}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

である.

動点Pが4秒後に点Aに存在する確率は

$$\frac{1}{4}r_4 = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{16}\right) = \frac{5}{32}$$

$n \geqq 1$ のとき，動点Pが n 秒後に点Fに存在する確率は

$$q_n = \frac{1}{6}r_{n-1} = \frac{1}{9}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

q_n が最大になる，すなわち 〰〰 が最小になるのは $n=2$ のときで，このとき

$$q_2 = \frac{1}{9}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{1}{6}$$

（$q_0=0$ ゆえこれが q_n の最大値だとして問題ない）

また，$n \geqq 1$ のとき

$$p_n = \frac{1}{3}r_{n-1} = \frac{2}{9}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

だから，

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{2}{9}$$