$\boxed{1}$

2 次方程式 $x^2+ax+4b=0$ の解を α, β とおく。 ただし, 実数 a, b は $a^2-10a+b^2=0$ を満たす。 このとき, 次の問に答えなさい。

(1) α, β が実数でないとき, $|\alpha|$ の最大値は $\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ であり, このとき, $a=\boxed{\text{ウ}}, b=\boxed{\text{エ}}$ である。

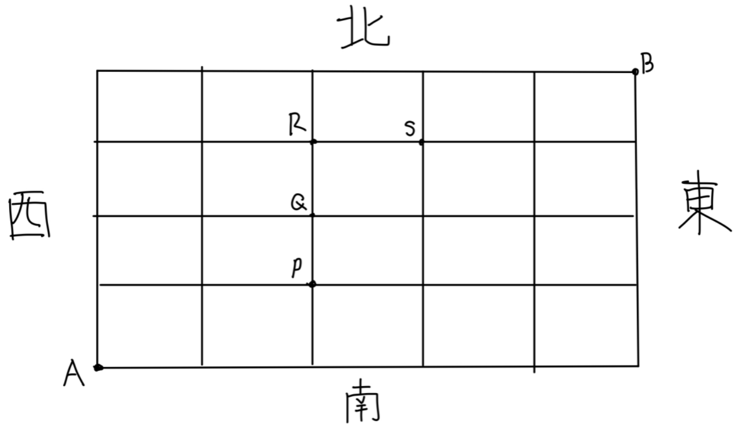
(2) $\alpha=\beta$ で $a\neq 0$ のとき, $a=\boxed{\text{オ}}, b=\boxed{\text{カ}}, \alpha=\beta=\boxed{\text{キク}}$ である。

(3) α, β が実数であるとする. このとき,

(3-1) $\alpha^2+\beta^2+10\alpha+10\beta$ の最大値は $\boxed{\text{ケコ}}$ である.

(3-2) $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\alpha\beta-\alpha-\beta$ の最大値は $\boxed{\text{サ}}+\boxed{\text{シ}}\sqrt{\boxed{\text{ス}}}$, 最小値は $\boxed{\text{セソ}}$ である.

$\boxed{2}$



上図のように, 東西に 5 本, 南北に 6 本の道がある. A から B まで行く道順を考える. 次の問に答えなさい.

(1) A から B まで最短で行く道順は $\boxed{\text{アイウ}}$ 通りである.

(2) Q を通って, A から B まで最短で行く道順は $\boxed{\text{エオ}}$ 通りである.

(3) 区画 QR および区画 RS のどちらも通らずに, A から B まで最短で行く道順は $\boxed{\text{カキ}}$ 通りである.

(4) A から B まで行く途中に, 一回だけ東から西に一区画もどることにして行くとする. ただし, この一回以外は, 東か北ののいずれかにしか移動しない. また, B には一度だけ到達するものとする. このとき,

(4-1) P, Q, R のいずれかで一区画西に戻ることにして, A から B まで最短で行く道順は $\boxed{\text{クケコ}}$ 通りである.

(4-2) 途中に一回だけ東から西に一区画戻ることにして, A から B まで最短で行く道順は $\boxed{\text{サシスセ}}$ 通りである.

$\boxed{3}$

$-\dfrac{\pi}{2} < x < \dfrac{\pi}{2}$ を定義域とする 2 つの関数, $f(x), g(x)$ が, 次の (i), (ii) を満たすとする.

$$\text{(i)} \quad f(x) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\tan^2 x + (3-\sqrt{3})\tan x - 8g(x),$$

$$\text{(ii)} \quad g'(x) = \tan x, g(0) = 0$$

このとき, 次の問に答えなさい. 以下, 対数は自然対数とする.

(1) $f'(0) = \boxed{\text{ア}} - \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$, $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \boxed{\text{ウ}}$ である.

(2) $f(x)$ の極小値を求めると,

$$x = -\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}}\pi \text{のとき}, \ \frac{\boxed{\text{カ}} - \boxed{\text{キ}}\sqrt{\boxed{\text{ク}}}}{\boxed{\text{ケ}}} - \boxed{\text{コ}}\log 2,$$

$$x = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}\pi \text{のとき}, \ \frac{\boxed{\text{ス}} - \sqrt{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}} - \boxed{\text{タ}}\log 2$$

の 2 つである.

(3) $f(x)$ の極大値を求めると, $x = \dfrac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}\pi$ のとき,

$$\frac{\boxed{\text{トナ}} - \boxed{\text{ニ}}\sqrt{\boxed{\text{ヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}} + \boxed{\text{ノ}}\log\left(\frac{\sqrt{\boxed{\text{ハ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ヒ}}}}{4}\right) \text{である.}$$

ただし, $\boxed{\text{ハ}} > \boxed{\text{ヒ}}$ とする.

$\boxed{1}$

(1) α, βが実数でないので (判別式)<0 より

$D = a^2 - 4\cdot 4b = a^2 - 16b < 0$ — ①

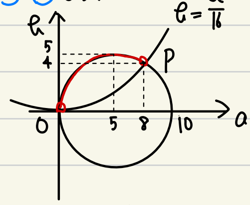
この下で2次方程式の解は、

$x = \dfrac{-a \pm \sqrt{16b - a^2}\,i}{2}$ より、

$|\alpha|^2 = \dfrac{a^2}{4} + \dfrac{(16b - a^2)}{4} = 4b$ — ②

また、条件より、$a^2 - 10a + b^2 = 0$　$(a-5)^2 + b^2 = 25$ — ③

①②③より、



ab平面において、赤部分におけるbの最大を考えることが$|\alpha|^2$の最大を考えることに等しい

$\begin{cases} b = \frac{1}{16}a^2 \\ (a-5)^2 + b^2 = 25 \end{cases}$ $\therefore (a, b) = (0, 0), (8, 4)$

より、P(8, 4)なのでbのMaxは5であり、

$|\alpha|^2_{Max} = 5\cdot 4 = 20$　$\therefore |\alpha|_{Max} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$　このとき$(a, b) = (5, 5)$ —(アイウエ)

(2) 2次方程式は重解をもつので、

$D = a^2 - 16b = 0$ — ④

③④の解は(1)の図より $(a, b) \neq (0, 0)$ のとき $(a, b) = (8, 4)$ より、
(オ)(カ)

求める$(a, b) = (8, 4)$

また、このとき $x^2 + 8x + 16 = 0$ $\therefore (x+4)^2 = 0$ $\therefore \alpha = \beta = -4$ —(キク)

(3)

(i) $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$のとき、(判別式)$\geqq 0$より

$D \geqq 0$ $\therefore b \leqq \frac{a^2}{16}$ — ⑤

また、解と係数の関係より、

$\begin{cases} \alpha + \beta = -a \\ \alpha\beta = 4b \end{cases}$ — ⑥

⑥を与式に代入して、

$(与式) = (\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta + 10(\alpha+\beta) = (-a)^2 - 2\cdot 4b + 10\times(-a)$

$= a^2 - 10a - 8b$

$= -b^2 - 8b$ (∵③)

上図よりbのとるハンイは

$-5 \leqq b \leqq 4$ より、

$-b^2 - 8b = -(b+4)^2 + 16$

より $b = -4$ のとき Max 16 をとる
(ケコ)

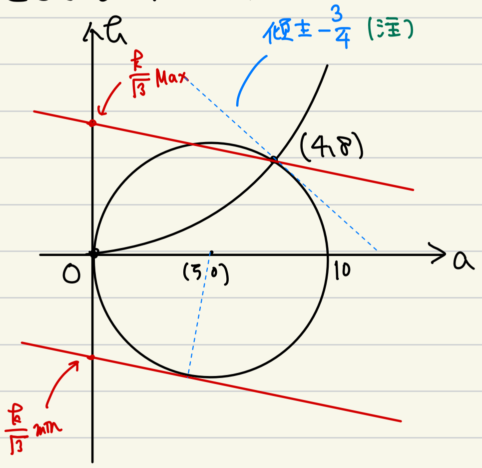
(3)

(ii) 同様にして

$(与式) = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 4b - (-a) = a + \sqrt{3}b$ —⑦

⑦ の Max, min を考えることと等しい。

ここで $a + \sqrt{3}b = k$ とおくと、



図より (8,4) における円の接線の傾きが $-\frac{3}{4}$ であることに注意すると

k が最大になるのは $(a, b) = (8, 4)$ のときで このとき、

$k = 8 + 4\sqrt{3}$ (最大) —(サシス)

k が最小になるとき直線と円が接するときなので

点と直線の距離公式より、

$$5 = \frac{|5-k|}{\sqrt{3+1}} \quad \therefore |5-k| = 10 \quad \therefore k = -5, 15$$

$k < 0$ より $k = -5$ (最小) —(セソ)

(注) $(a-5)^2 + b^2 = 25$ 上の点 (a_1, b_1) における接線の式は

$(a_1 - 5)(a-5) + b_1 b = 25$ であり、ここでは $(a_1, b_1) = (8, 4)$ より

$3(a-5) + 4b = 25$

$3a + 4b = 40$ より 傾き $-\frac{3}{4}$ となる。

$\boxed{2}$

(1) A→B に行くとき →を5つ、↑を4つ並べるときの場合の数に等しいので、

$_9C_4 = \underline{126通り}$ ―(アイウ)

(2) A→Q は同様にして $_4C_2 = 6$通り

Q→B も $_5C_2 = 10$通り より

A→Q→B の道順は、

$_4C_2 \times {}_5C_2 = \underline{60通り}$ ―(エオ)

(3) QR または RS をとおる場合を考える。

① QR を通るとき、

A→Q→R→B より、A→Q：$_4C_2$，Q→R：$_1C_1$，R→B：$_4C_1$ 通り より、

$_4C_2 \times {}_1C_1 \times {}_4C_1 = 24$通り

② RS を通るときも同様に

$_5C_2 \times {}_1C_1 \times {}_3C_1 = 30$通り

③ QR、RS を共に通るとき、

$_4C_2 \times {}_3C_1 = 18$通り

よって QR または RS を通る道順は $24 + 30 - 18 = 36$通り より

QRもRSも通らない道順は $126 - 36 = \underline{90通り}$ ―(カキ)

(4)

(4-1)

Pの1つ西に移動したところから Bに向かう。

① Pで戻るとき、$_3C_1 \times {}_7C_3 = 105$ 通り、

② Q 〃 $_4C_2 \times {}_6C_2 = 90$通り

③ R 〃 $_5C_2 \times {}_5C_1 = 50$通り

①②③あわせて $105 + 90 + 50 = \underline{245通り}$ ―(クケコ)

$\boxed{2}$

(4)

(4-2) 結局，↑4ヶ →6ヶ，←1ヶを並べたときの場合の数に等しい. ―(ア)

但し、条件より ← がどの → よりも左か右にくる場合 ―Ⓐ

と、最後が ←→ で終わる場合は除く。 ―Ⓑ

(ア)の場合，$\frac{11!}{6!4!}$ 通り、

Ⓐの場合，まず4ヶの↑と7ヶの○を並べて ○7この中で最も左か右にあるものに← を入れたらよいので

$_{11}C_4 \times 2 = 660$ 通り、

Ⓑの場合，↑4つと →5こを並べて最後に ←→ を並べるのに等しいので、

(1)と同じて 126通り、

以上、求める道順は、

$\frac{11!}{6!4!} - 660 - 126 = \underline{1524 \text{通り}}$ ―(サ~セ)

$\boxed{3}$ 以下、$\sin x = s$　$\cos x = c$，$\tan x = t$ とする。

(1) $f'(x) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\cdot 2t\cdot\frac{1}{c^2} + (3-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{c^2} - 8g'(x)$

$= (1+\sqrt{3})\cdot t\cdot\frac{1}{c^2} + (3-\sqrt{3})\cdot\frac{1}{c^2} - 8t$　$(\because g'(x) = \tan x)$ − (＊)

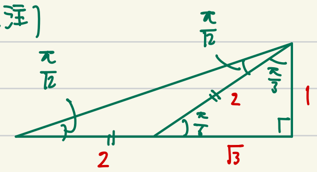
今、$x=0$ で $s=t=0$，$c=1$

$x=\frac{\pi}{4}$ で $s=c=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$t=1$ より、各々代入して、

$f'(0) = 0 + (3-\sqrt{3}) - 0 = \underline{3-\sqrt{3}}$ (ア~イ)

$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = (1+\sqrt{3})\cdot 1\cdot 2 + (3-\sqrt{3})\cdot 2 - 8 = \underline{0}$ − (ウ)

(注)



図より $\tan\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$

ここから因数定理を使っていく、

$t=1$ で値が0なので…

(2) (＊)をさらに変形する。

$f'(x) = (1+\sqrt{3})t(1+t^2) + (3-\sqrt{3})(1+t^2) - 8t$

$= (1+\sqrt{3})\{t^3 + (2\sqrt{3}-3)t^2 + (5-4\sqrt{3})t + (2\sqrt{3}-3)\}$

$= (1+\sqrt{3})(t-1)\{t^2 + 2(\sqrt{3}-1)t + (3-2\sqrt{3})\}$ ← この二次方程式の解は解の公式から、$t=-\sqrt{3}$、$2-\sqrt{3}$

$= (1+\sqrt{3})(t-1)(t+\sqrt{3})(t-(2-\sqrt{3}))$

ここで $\tan x = 2-\sqrt{3}$ なる x は $\frac{\pi}{12}$ より、− (注)

増減表は以下の通り、

x	$-\frac{\pi}{2}$	…	$-\frac{\pi}{3}$	…	$\frac{\pi}{12}$	…	$\frac{\pi}{4}$	…	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	0	+	
$f(x)$		↘	極小	↗	極大	↘	極小	↗	

また、ここで、$g(x) = g(x) - g(0) = \int_0^x g'(t)\,dt$　$(\because g(0)=0)$

$= \int_0^x \tan t\,dt = -\log|\cos x|$ であるので、

上表より極小値は $x = -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}$ であるので、

$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (3-\sqrt{3})(-\sqrt{3}) - 8\left(-\log\left|\frac{1}{2}\right|\right)$

$= \frac{3}{2}(1+\sqrt{3}) + 3 - 3\sqrt{3} - 8\log 2 = \frac{9-3\sqrt{3}}{2} - 8\log 2$ − (エ~コ)

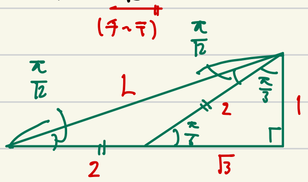
$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot 1^2 + (3-\sqrt{3})\cdot 1 - 8\log\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{7-\sqrt{3}}{2} - 4\log 2$ − (サ~タ)

$\boxed{3}$

(3) 極大値は $\frac{\pi}{12}$ でとり、下図より $L^2 = 1 + (2+\sqrt{3})^2 = 8 + 4\sqrt{3} = 2(4+2\sqrt{3})$

(チ〜テ)

$= 2(1+\sqrt{3})^2$



$\therefore\ L = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ より、

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+2}{\sqrt{2}+\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$ より、

$$f\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{3})^2 + (3-\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) + 8\log\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$= \frac{13-7\sqrt{3}}{2} + 8\log\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$ (ト〜ヒ)