$\boxed{1}$

以下の設問に答えよ.

(1) a は 0 でない定数とする. 座標平面上に原点 O と点 A$(2,0)$ をとり, 線分 OA を直径とする円を C とする. また, 原点 O を焦点, 直線 $x=\dfrac{a}{2}$ を準線とする放物線を D とする. C と D をそれぞれ極方程式で表せ.

(2) k を定数とし, $0<x<2\pi$ の範囲ひおいて, 2つの関数 $f(x)=2\cos x$, $g(x)=\dfrac{k}{2(1-\cos x)}$ を定める. $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフの共有点の個数を求めよ.

$\boxed{2}$

m と n を $m < n$ を満たす自然数とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $2024 = n^2 - m^2$ を満たす m, n の組は何通りあるか求めよ.

(2) $2025 = n^2 - m^2$ を満たす m, n の組は何通りあるか求めよ.

(3) 2025 を m から n までの連続する自然数の和で表すことができる m, n の組は何通りあるか求めよ.

$\boxed{3}$

n を自然数とし, m を 3 以上の整数とする. $1, 2, \cdots, m$ の m 個の数字の中から一つの数字を無作為に表示するルーレットがあり, このルーレットに表示される数字を用いてゲームの勝敗を次のように定める.

(i) 表示された数字が 1 であれば勝ちとしてゲームを終了する.

(ii) 表示された数字が, 1 回前に表示された数字と同じであれば負けとしてゲームを終了する.(注意：1 回目に負けることはない.)

(iii) ゲームの勝敗が決まらなかった場合は引き分けとし, 再度ルーレットを回して新たな数字を表示させる.

ちょうど n 回目に表示された数字によって, ゲームに勝つ確率を a_n, ゲームに負ける確率を b_n, 引き分けになる確率を c_n とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k)$ を m を用いて表せ.

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k)$ を c_n を用いて表せ.

(3) c_n を m を用いて表せ.

(4) $\dfrac{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k}{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} b_k}$ を m を用いて表せ.

$\boxed{4}$

xyz 空間において, $x^2+y^2 \leqq 1$ かつ $0 \leqq z \leqq 4x^3-3x+1$ を満たす領域を S とする. この領域 S のうち $\dfrac{1}{2} \leqq x$ を満たす部分を T, $x \leqq \dfrac{1}{2}$ を満たす部分を　U とする. また, T の体積を V とする. 以下の設問に答えよ.

(1) $\cos 3\theta$ を $\cos\theta$ を用いて表せ. (答えだけで良い)

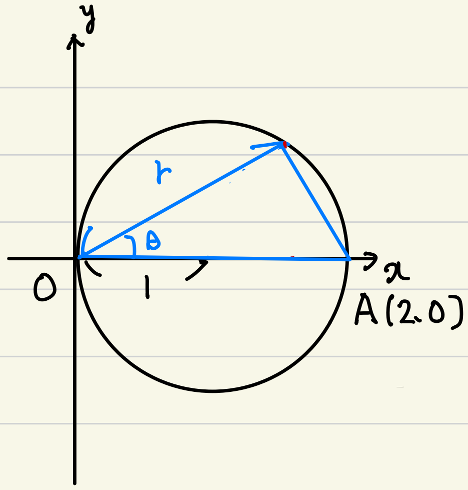
(2) V を求めよ.

(3) U の体積を V を用いて表せ.

(4) T を, z 軸の周りに反時計回りに 120° 回転させた立体のうち, S に含まれる部分の体積を V を用いて表せ.

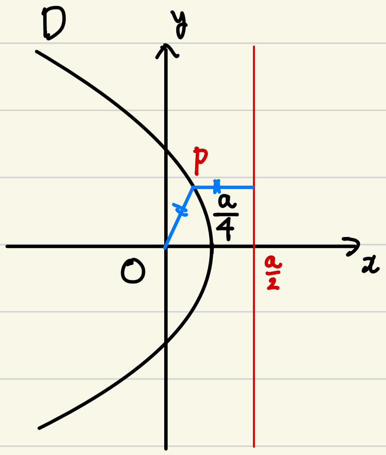
1

(1)



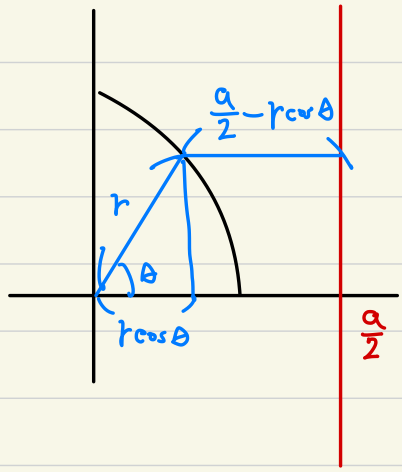
左図より (r, θ) を考えると直角三角形から、

$$2\cos\theta = r$$



① $a > 0$ のとき、

Pを極座標表示で (r, θ) とすると青部分の長さは等しいので、



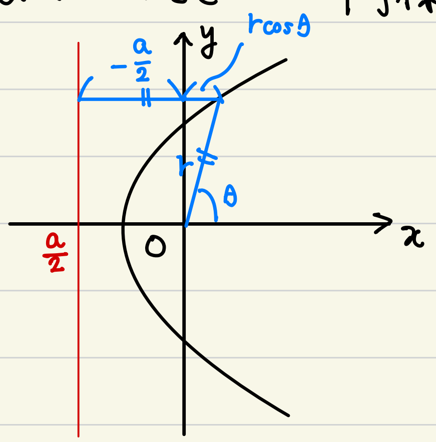
$$r = \frac{a}{2} - r\cos\theta$$

$$\therefore r(1+\cos\theta) = \frac{a}{2}$$

$\cos\theta \neq -1$ $(\because \theta \neq \pi)$

より $r = \dfrac{a}{2(1+\cos\theta)}$

② $a < 0$ のとき



同様に考えて、

$$r\cos\theta - \frac{a}{2} = r$$

$$\therefore r = \frac{-a}{2(1-\cos\theta)}$$

(2) $f(x)=g(x)$ のとき、$(0<x<2\pi)$

$$2\cos x=\frac{k}{2(1-\cos x)} \quad \therefore\ k=4\cos x(1-\cos x)\ (=h(x)\text{ とする。})$$

$h(x)=4(\cos x-\cos^2 x)$

$h'(x)=4(-\sin x+2\cos x\sin x)$

$\quad =4\sin x(2\cos x-1)$

より右図の増減表がかける。

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π		$\frac{5}{3}\pi$		2π
h'		+	0	−	0	+	0	−	
h		↗		↘		↗		↘	

$h(0)=0$

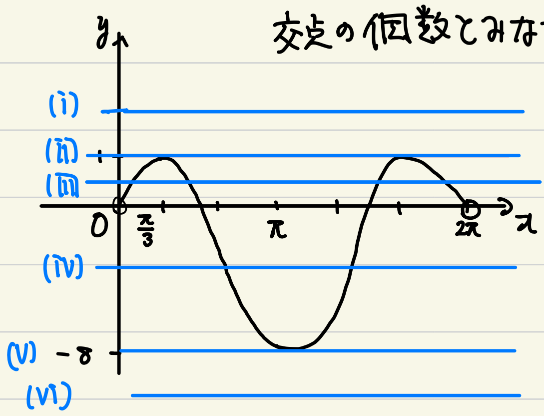
$h\left(\frac{\pi}{3}\right)=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}\right)=1$

$h(\pi)=4(-1-1)=-8$

$h\left(\frac{5}{3}\pi\right)=1$

$h(2\pi)=0$

より下のグラフがかける。$y=h(x)$ と $y=k$ の $0<x<2\pi$ における交点の個数とみなすと、



(i) $k>1$ のとき 0個

(ii) $k=1$ のとき 2個

(iii) $0<k<1$ 〃 4個

(iv) $-8<k\leqq 0$ 〃 2個

(v) $k=-8$ 〃 1個

(vi) $k<-8$ 〃 0個

$\boxed{2}$

(1) $2024 = (n+m)(n-m)$

ここで $2024 = 2^3 \times 11 \times 23$ である。

また $n+m$ と $n-m$ の偶奇は一致するので、

2024が偶数であることから $n+m$, $n-m$ は共に偶数、

また $\sqrt{2024} > 44$ であることから、$(n+m) \geqq 45$ であり、

$n+m$ が偶数かつ45以上となる $(n+m, n-m)$ の組は、

$n+m = 2 \times 23$, $2 \times 11 \times 23$, $2^2 \times 23$, $2^2 \times 11 \times 23$ の $\underline{4通り}$

(2) $2025 = (n+m)(n-m)$ のとき

$2025 = 45^2 = 3^4 \times 5^2$ である。

$n+m > n-m$ より $n-m \leqq 44$ となるような $n-m$ の数の個数が組の数となる。

このような $n-m$ は $n-m = 1, 3, 5, 9, 15, 25, 27$, の7組より

求める (m, n) の組は $\underline{7通り}$

(3) $2025 = m + (m+1) \cdots + n$ であるので $(m < n)$

$$2025 = \sum_{k=1}^{n} k - \sum_{k=1}^{m-1} k$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}(m-1)m$$

因数分解の形をつくる。

$$\therefore 4050 = n(n+1) - m(m-1)$$

$$= n^2 + n - m^2 + m$$

$$= (n-m)(n+m) + (n+m)$$

$$= (n+m)(n-m+1)$$

$(m \geqq 1$ より$)$

ここで $n+m$ と $n-m+1$ の偶奇は一致せず、$n+m \geqq n+1 > n-m+1 > 1$ に注意する。

$4050 = 2 \times 3^4 \times 5^2$ の下で 4050の約数の数は $2 \times 5 \times 3 = 30$ 個であり、

$(n+m, n-m+1)$ のくみあわせは $(4050, 1)$ を除いた約数の組みあわせの数に等しく、(但し、$m+n > n-m+1$) $n+m = n-m+1$ なる組みあわせはないので

$30 \div 2 - 1 = \underline{14通り}$

$\boxed{3}$

(1) k回目でかつときは、(k−1)回目までは引き分けでk回目で1を出すときより、

$$a_k = \frac{1}{m}c_{k-1} \quad (k \geqq 2) \quad -①$$

↑ 1をだすカクリツ

k回目でまけるときは、(k−1)回目までは引き分けでk回目で1を出すときより、

$$b_k = \frac{1}{m}c_{k-1} \quad (k \geqq 2) \quad -②$$

↑ (k−1)回目と同じ数字を出すカクリツ

よって $k \geqq 2$ で $a_k = b_k$ (∵ ①②)

$k=1$ のときは $a_1 = \frac{1}{m}$ $b_1 = 0$ より、

うまく上の事実を利用できるように変形した。

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k - b_k) = (a_1 - b_1) + \sum_{k=2}^{n}(a_k - b_k)$$

$$= \frac{1}{m} - 0 + \sum_{k=2}^{n} 0$$

$$= \frac{1}{m} \quad -(3)$$

(2) k回目でひきわけるときは、(k−1)回目もひきわけでk回目で(k−1)回目でひいた数字と1以外をひくときより、

$$c_k = \frac{m-2}{m}c_{k-1} \quad (k \geqq 2) \quad -③$$

①+②+③より

$$a_k + b_k + c_k = c_{k-1} \quad (k \geqq 2) \text{ より}$$

$$\therefore\ c_k = a_{k+1} + b_{k+1} + c_{k+1} \quad (k \geqq 1)$$

$$\therefore\ a_{k+1} + b_{k+1} = c_k - c_{k+1} \quad -(*) \quad (k \geqq 1)$$

和の中ぬけがつくれそう。

(*)より

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k + b_k) = a_1 + b_1 + \sum_{k=2}^{n}(a_k + b_k)$$

(*)の利用

$$= \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{n-1}(a_{k+1} + b_{k+1})$$

$$= \frac{1}{m} + \sum_{k=1}^{n-1}(c_k - c_{k+1})$$

$$= \frac{1}{m} + (c_1 - \cancel{c_2}) + (\cancel{c_2} - \cancel{c_3}) + \cdots + (\cancel{c_{n-1}} - c_n)$$

$$= \frac{1}{m} + (c_1 - c_n) \qquad c_1 = 1 - a_1 - b_1$$

$$= \frac{1}{m} + \left(1 - \frac{1}{m}\right) - c_n = \underline{1 - c_n} \quad \text{—(イ)}$$

(3) ③より

$$c_{k+1} = \left(1 - \frac{2}{m}\right) c_k \quad (k \geqq 1)$$

$$\therefore\ c_n = \left(1 - \frac{2}{m}\right)^{n-1} c_1 = \underline{\left(1 - \frac{1}{m}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right)^{n-1}}$$

(4) (1)~(3)の誘導を用いる.

(ア)+(イ)より

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m} - c_n\right)$$

(イ)−(ア)より

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \frac{1}{2}\left(1 - c_n - \frac{1}{m}\right)$$

公比 $0 < 1 - \frac{2}{m} < 1$

よって, $\lim_{n \to \infty} c_n = 0$ であることより,

$$\frac{\sum_{k=1}^{\infty} a_k}{\sum_{k=1}^{\infty} b_k} = \frac{\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{m}\right)}{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{m}\right)} = \underline{\frac{m+1}{m-1}}$$

$\boxed{4}$

(1) $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

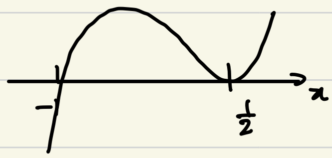
(2) まず x の存在するハンイは $4x^3-3x+1 \geqq 0$ （zの存在条件）なので.

$$4x^3-3x+1 \geqq 0$$

$$\therefore (2x-1)(2x^2+x-1) \geqq 0$$

$$(2x-1)^2(x+1) \geqq 0$$

$\therefore \ -1 \leqq x$ である. ―①



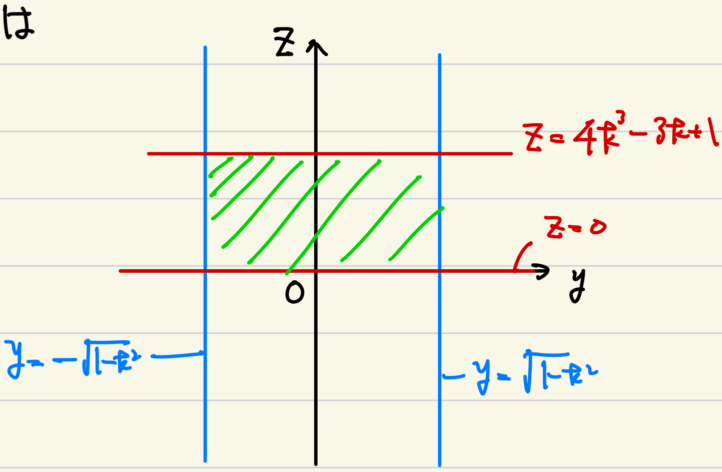
また $y^2 = 1-x^2 \geqq 0$ より、$1 \geqq x \geqq -1$ ―②

①②より $-1 \leqq x \leqq 1$ が立体が存在する範囲である.

ここで Tの存在する x のハンイは $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ であり、$x = k \left(\frac{1}{2} \leqq k \leqq 1\right)$ での Tの断面積を $S(k)$ とすると 断面を表す方程式は

$$\begin{cases} y^2 \leqq 1-k^2 \\ 0 \leqq z \leqq 4k^3-3k+1 \end{cases}$$

より、yz平面で示すと次図 →



よって $S(k) = 2\sqrt{1-k^2}\,(4k^3-3k+1)$

求めたい V は

$\left[V = \int_{\frac{1}{2}}^{1} S(k)\,dk \right]$ なので

$$V = \int_{\frac{1}{2}}^{1} 2\sqrt{1-k^2}\,(4k^3-3k+1)\,dk$$

（ここで (1)の利用を考える. $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ なので…）

$k = \cos\theta$ とすると. $dk = -\sin\theta\,d\theta \qquad \theta : \frac{\pi}{3} \to 0$

$$V = \int_{\frac{\pi}{3}}^{0} 2\sqrt{1-\cos^2\theta}\,(4\cos^3\theta - 3\cos\theta + 1)(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin^2\theta\,(4\cos^3\theta - 3\cos\theta + 1)\,d\theta$$

微分の接触形をつくる.

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} 2\sin^2\theta\,(4\cos\theta(1-\sin^2\theta) - 3\cos\theta + 1)\,d\theta$$

$$= \int_{0}^{\frac{\pi}{3}} (8\sin^2\theta\cos\theta - 8\sin^4\theta\cos\theta - 6\sin^2\theta\cos\theta + 2\sin^2\theta)\,d\theta$$

$$= \left[\frac{2}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} - \left[\frac{8}{5}\sin^5\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}} + \int_0^{\frac{\pi}{3}} (1-\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - \frac{8}{5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^5 + \left[\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{2}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{\cancel{8}}{5}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{\underset{4}{\cancel{32}}} + \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{9}{20}\sqrt{3} + \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \underline{\frac{\pi}{3} - \frac{9}{20}\sqrt{3}}\ //$$

(3) Uが存在するxのハンイは $-1 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ であり $x=k\ \left(-1 \leqq k \leqq \frac{1}{2}\right)$ におけるUの断面積を $J(k)$ とすると、断面を表す方程式は

$$\begin{cases} y^2 \leqq 1-k^2 \\ 0 \leqq z \leqq 4k^3-3k+1 \end{cases}$$

より、(2)と同様に

$J(k) = 2\sqrt{1-k^2}\,(4k^3-3k+1)$ より、Uの体積をWとすると

$$W = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} J(k)\,dk = \int_{-1}^{\frac{1}{2}} S(k)\,dk \leftarrow S(k) = J(k)$$

$$= \int_{-1}^{1} S(k)\,dk - \underline{\int_{\frac{1}{2}}^{1} S(k)\,dk}\quad V$$

$2\sqrt{1-k^2}\,(4k^3-3k)$ は奇関数!

$$= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-k^2}\,(4k^3-3k+1)\,dk - V$$

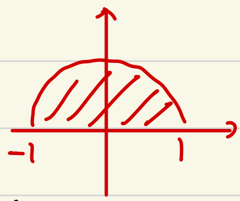
$f(x)$ 奇関数のとき

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

$$= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1-k^2}\,dk - V$$

円の面積とみる。

$$= 2\cdot\frac{\pi}{2} - V = \underline{\pi - V}\ //$$



(4) $z=k$ における断面を考える。このときの断面の方程式は

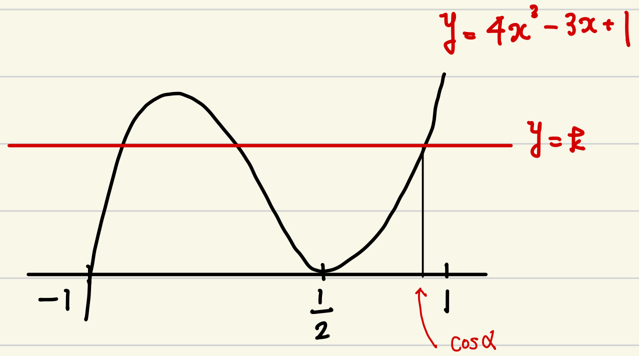
$$\begin{cases} x^2+y^2 \leqq 1 \\ 0 \leqq k \leqq 4x^3-3x+1 \end{cases}$$

ここで $4x^3-3x+1 = k$ を満たす x について考える。 $-1 \leqq x \leqq 1$ なので $x = \cos\theta$ とおくと

$$4\cos^3\theta - 3\cos\theta = k-1$$

$$\therefore \quad \cos 3\theta = k-1$$

次ページへつづく。



ここで特に $x \geqq \frac{1}{2}$ なる上の三次方程式の解を $x=\cos\alpha$ とすると. $\left(0 \leqq \alpha \leqq \frac{\pi}{3}\right)$

$\cos 3\alpha = k-1$ だが、このとき、

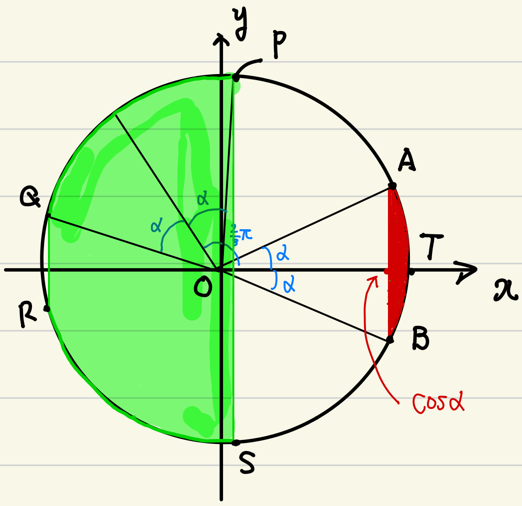
$\cos 3\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right) = \cos(3\alpha+2\pi) = k-1$

$\cos 3\left(-\alpha+\frac{2}{3}\pi\right) = \cos(-3\alpha+2\pi) = k-1$

より、このとき

$x=\cos\left(\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)$, $\cos\left(-\alpha+\frac{2}{3}\pi\right)$ も

解となり.この3つが2次方程式の解となる。よって断面図は以下.



ここで赤色部分がT, 緑色部分がUであり

$(よて\ \angle POQ = 2\alpha)$

$\angle TOP = \frac{2}{3}\pi - \alpha$

$\angle TOQ = \frac{2}{3}\pi + \alpha$

に注目して. $120^\circ\left(=\frac{2}{3}\pi\right)$ 回転したときの立体に注目すると、

AはQ に、BはP に重なるため、回転後のTは全てSに含まれていることが分かる.

よってその体積は $\underline{V}$ //