$\boxed{1}$

座標平面上に 2 つの直線 $l : y = 2x + 4$, $m : y = -2x + 12$ がある．2 直線 l, m の交点を A とし，直線 m と x 軸の交点を B とする．線分 AB を直径とする円を K とし，直線 l と円 K の共有点で A でない方を C とする．また，D$(2, 0)$ とする．

(1) 点 A の座標は $(\boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ であり，円 K の中心の座標は $(\boxed{\text{ウ}}, \boxed{\text{エ}})$，半径は $\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}$ である．また，点 C の座標は $\left(-\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}, \dfrac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}\right)$ である．

(2) $\angle\mathrm{ADC} = \alpha$, $\angle\mathrm{BCD} = \beta$ とするとき，$\tan\alpha = \dfrac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ であり，$\sin(\alpha - \beta) = \dfrac{\boxed{\text{セ}}\sqrt{\boxed{\text{ソ}}}}{\boxed{\text{タチ}}}$ である．

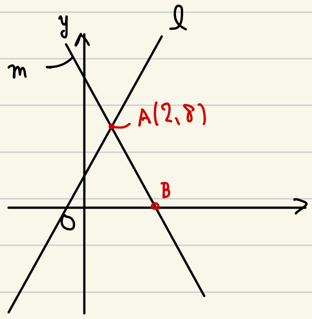
(3) a を定数とし，円 K の点 D を含む弧 BC と線分 AB および線分 AC で囲まれた領域を L とする．点 (x, y) が領域 L を動くとき，$ax - y$ の最大値 M は，

$$\begin{cases} a < -\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}} \text{ のとき,} \\ \qquad M = \dfrac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}(a + \boxed{\text{ネ}}) \\ -\dfrac{\boxed{\text{ツテ}}}{\boxed{\text{ト}}} \leqq a \leqq \dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} \text{ のとき,} \\ \qquad M = \boxed{\text{ヒ}}a - \boxed{\text{フ}} + \boxed{\text{ヘ}}\sqrt{\boxed{\text{ホ}}(a^2 + \boxed{\text{マ}})} \\ \dfrac{\boxed{\text{ノ}}}{\boxed{\text{ハ}}} \leqq a \text{ のとき,} \\ \qquad M = \boxed{\text{ミ}}a \end{cases}$$

である．

また，a の値が変化するとき，M が最小値をとるのは，$a = \boxed{\text{ムメ}}$ のときである．

(1) $\begin{cases} y = 2x + 4 \\ y = -2x + 12 \end{cases}$ をといて $A(x, y) = (2, 8)$ また $B(6, 0)$ より、Kの中心はABの中点



なので $(4, 4)$ また半径は $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$ であり、

$\overrightarrow{AB} = (4, -8)$ $\therefore |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 64} = 4\sqrt{5}$

$\therefore$ 半径 $= \frac{1}{2} \times |\overrightarrow{AB}| = 2\sqrt{5}$

また以上よりKの方程式は

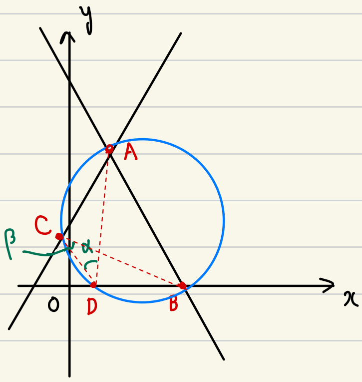
$(x-4)^2 + (y-4)^2 = 20$ ―① なので

$y = 2x + 4$ ―② と合わせて、

$\begin{cases} (x-4)^2 + (2x \quad)^2 = 20 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} 5x^2 - 8x - 4 = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} (x-2)(5x+2) = 0 \\ y = 2x + 4 \end{cases}$

より $x = -\frac{2}{5}$ $y = \frac{16}{5}$ より $C\left(-\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right)$

(2)



D(2 0)は①をみたすので、円K上にある。☆

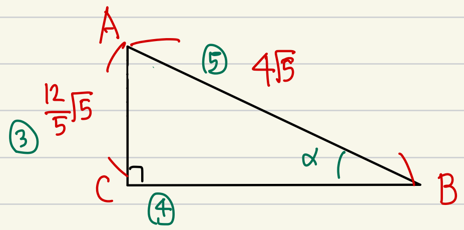
ここで円周角の定理と内接四角形の性質より、

$\begin{cases} \angle ADC = \angle ABC = \alpha \\ \angle BCD = \angle BAD = \beta \end{cases}$

また AB直径より $\angle ACB = \frac{\pi}{2}$ より、$\triangle ABC$について考える。

ここで $AB=4\sqrt{5}$　$A(2,8)$　$C\left(-\frac{2}{5},\frac{11}{5}\right)$ より　$AC=\sqrt{5}\times\frac{12}{5}=\frac{12}{5}\sqrt{5}$ である(注)

また $\angle C=\pi/2$, $AB:AC=5:3$ より左図のようになり、

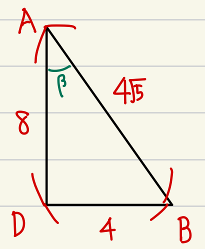


$\tan\alpha=\frac{3}{4}$

また $\sin\alpha=\frac{3}{5}$　$\cos\alpha=\frac{4}{5}$ である

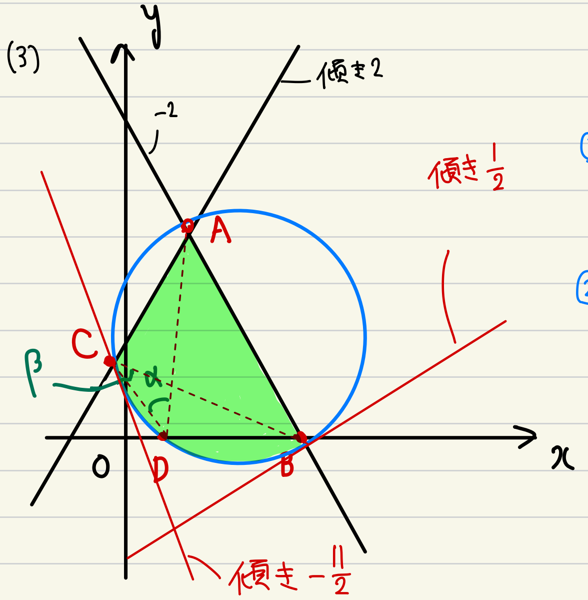
また、△ABDについても考えると、下図より

$\cos\beta=\frac{8}{4\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{5}}$　$\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{5}}$ である。



よって　$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta=\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{2}{5\sqrt{5}}=\frac{2}{25}\sqrt{5}$

(3)



$ax-y=k$ とおくと、$y=ax-k$ である。

ここで B, C における接線の傾きはそれぞれ $\frac{1}{2}$, $-\frac{11}{2}$ より、

① $a<-\frac{11}{2}$ のときは この直線が C を通るとき、

k は Max で　$k=-\frac{2}{5}a-\frac{16}{5}=-\frac{2}{5}(a+8)$

② $-\frac{11}{2}\leqq a<\frac{1}{2}$ のときは直線と円弧が接するとき

k_{Max} で 点と直線のキョリを考え ← 中心は $(4,4)$

$$2\sqrt{5}=\frac{|4a-4-k|}{\sqrt{a^2+1}}$$

$$4a-4-k=\pm2\sqrt{5(a^2+1)}$$

$$k=4a-4\mp2\sqrt{5(a^2+1)}$$

より 最大は　$4a-4+2\sqrt{5(a^2+1)}$

③ $\frac{1}{2}\leqq a$ のとき k が最大となるのは直線が B を通るときより、

$k_{Max}=6a$

また、a の値を変化させたとき、

$\begin{cases}\frac{1}{2}\leqq a \text{ で } M \text{ は増加}\\ -\frac{11}{2}\geqq a \text{ で } M \text{ は減少}\end{cases}$ するので、

M の最小は $-\frac{11}{2}\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ で実現

この区間で $M=f(a)$ とすると、

$$f'(a)=4+\frac{10a}{\sqrt{5(a^2+1)}}=2\left(\frac{4-a^2}{\sqrt{a^2+1}\left(2\sqrt{a^2+1}-\sqrt{5}a\right)}\right)$$

より、以下の増減表がかけ、M が最小になるのは $a=-2$ のとき。

a	$-\frac{11}{2}$		-2		$\frac{1}{2}$
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		↘		↗	

$\boxed{2}$

a は $0 < a \leqq 1$ を満たす定数とし, 関数 $f(x) = \log(x + a)$ がある.

(1) $a = 1$ とする. $y = f(x)$ のグラフを C_1 とし, C_1 上の点 $(1, f(1))$ における法線を l とする.

(i) $f'(1) = \dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり, 法線 l の方程式は, $y = \boxed{\text{ウエ}}x + \boxed{\text{オ}} + \log \boxed{\text{カ}}$ である. また, C_1 と l および y 軸で囲まれた図形の面積は, $\boxed{\text{キ}} - \log \boxed{\text{ク}}$ である.

(ii) p, q を定数とし, q は $\log 2 < q < \boxed{\text{オ}} + \log \boxed{\text{カ}}$ を満たすとする. $y = p\log(x+1) + q$ のグラフを C_2 とし, C_2 が点 $(1, \log 2)$ を通るとき, $q = (\boxed{\text{ケ}} - p)\log \boxed{\text{コ}}$ である. このとき, $x \geqq 0$ の部分で C_2 と l および y 軸で囲まれた図形の面積が $\dfrac{\log 2 + 1}{2}$ であれば, $p = \dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である.

(2) $g(a) = \displaystyle\int_0^1 |f(x)|\,dx$ とする.
$g(a) = (a + \boxed{\text{セ}})\log\left(a + \boxed{\text{ソ}}\right) + a\log a - \boxed{\text{タ}}a + \boxed{\text{チ}}$ である. また, $g'(a) = 0$ の解は, $a = \dfrac{\sqrt{\boxed{\text{ツ}}} - \boxed{\text{テ}}}{\boxed{\text{ト}}}$ であり, a の値が変化するとき, $g(a)$ の最小値は,

$$\log \frac{\sqrt{\text{ナ}} + \boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}} + \boxed{\text{ネ}} - \sqrt{\boxed{\text{ノ}}}$$

である.

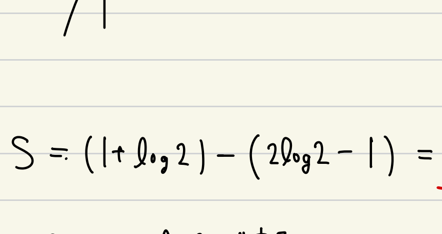
(1) $f'(x) = \dfrac{1}{x+a}$ であり、$a=1$ のとき、$f'(x) = \dfrac{1}{x+1}$

$\therefore f'(1) = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$ //

また この点での 法線の方程式は、

l、$y = -\dfrac{1}{f'(1)}(x-1) + f(1) = -2(x-1) + \log 2 = -2x + 2 + \log 2$ //

C_1, l, y軸で囲まれた図形の面積は、以下の図を参照して、Sとすると、



$S =$  $-$ 

①: $\displaystyle\int_0^1 (-2x + 2 + \log 2)\,dx = \left[(2+\log 2)x - x^2\right]_0^1$
$= 1 + \log 2$

②: $\displaystyle\int_0^1 \log(x+1)\,dx = \int_0^1 (x+1)'\log(x+1)\,dx$
$= \left[(x+1)\log(x+1) - x\right]_0^1$
$= 2\log 2 - 1$

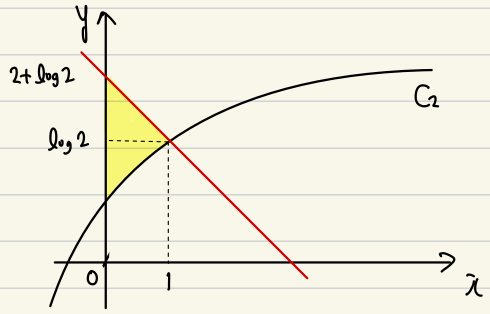
よって $S = (1 + \log 2) - (2\log 2 - 1) = 2 - \log 2$ //

(ii) $\log 2 < q < 2 + \log 2$ である

$y = p\log(x+1) + q$ が $(1, \log 2)$ を通るので、代入して、

$\log 2 = p\log 2 + q \quad \therefore q = (1-p)\log 2$ //

(ii) このとき、C_2とl, y軸で囲まれた図形は以下のようになる。左図の面積をS'とすると.



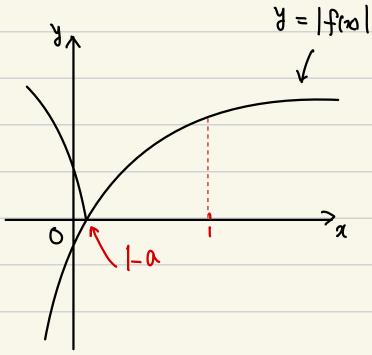
$$S' = \boxed{①} - \boxed{③}$$

③ : $\int_0^1 \{p\log(x+1) + (1-p)\log 2\}\,dx$

$= \left[p(x+1)\log(x+1) - px + (1-p)\log 2 \cdot x\right]_0^1$

$= 2p\log 2 - p + (1-p)\log 2$

$= p\log 2 - p + \log 2$



よって $S' = (1+\log 2) - (p\log 2 - p + \log 2)$

$= (1+p) - p\log 2$

が $\frac{1}{2}(\log 2 + 1)$ となるので $p = -\frac{1}{2}$

(2) $g(a) = \int_0^1 |\log(x+a)|\,dx$

$= \int_0^{-a+1} -\log(x+a)\,dx + \int_{-a+1}^1 \log(x+a)\,dx$

$= \left[-(x+a)\log(x+a) + x\right]_0^{-a+1} + \left[(x+a)\log(x+a) - x\right]_{-a+1}^1$

$= (-a+1) - (-a\log a) + (1+a)\log(1+a) - 1 - (a-1)$

$= -2a + 1 + a\log a + (a+1)\log(a+1)$

$g'(a) = -2 + \log a + 1 + \log(a+1) + 1$

$= \log a(a+1)$

より $g'(a) = 0$ のとき $\log a(a+1) = 0$ ∴ $a(a+1) = 1$ ∴ $a^2 + a - 1 = 0$ ∴ $a = \frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$

$0 < a \leqq 1$ より $a = \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$

この下で $g(a)$ について増減表をかくと

a	0		$\frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$		1
g'		$-$	0	$+$	
g		↘		↗	

$a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ で $g'(a) = 0$

$g(a)$が最小となるとき $a = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ より、

$g(a) = a\log a(a+1) + \log(a+1) - 2a + 1 = ag'(a) + \log(a+1) - 2a + 1$ より、

$g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \log\frac{1+\sqrt{5}}{2} + 2 - \sqrt{5}$

$\boxed{3}$

i を虚数単位とし，2 つの複素数 $\alpha = 2+4i,\ \beta = 1-3i$ がある．

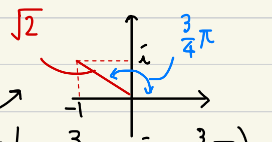
(1) $|\alpha| = \boxed{ア}\sqrt{\boxed{イ}}$，$\dfrac{\alpha}{\beta} = \boxed{ウエ} + i$ であり，$\dfrac{\alpha}{\beta}$ を極形式で表すと，$\dfrac{\alpha}{\beta} = \sqrt{\boxed{オ}}\left(\cos\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi + i\sin\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\pi\right)$ となる．ただし，$0 \leqq \arg\dfrac{\alpha}{\beta} < 2\pi$ とする．
また，$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{20} = \boxed{クケコサシ}$ である．

(2) 複素数 z は，方程式 $|z-\beta| = \sqrt{2}$ を満たしている．このとき，$|z-\alpha|$ の最大値は $\boxed{ス}\sqrt{\boxed{セ}}$ であり，そのときの z は $\dfrac{\boxed{ソ} - \boxed{タチ}i}{\boxed{ツ}}$ である．

(3) 複素数平面上で，複素数 α, β が表す点をそれぞれ A, B とする．$\gamma = \dfrac{\boxed{テ} - i}{\boxed{トナ}}$ とするとき，直線 AB 上の点を表す複素数 z は，常に方程式 $\overline{\gamma}z + \gamma\overline{z} = 1$ を満たす．このとき，$zw = 10$ を満たす複素数 w が表す点は，点 $\dfrac{\boxed{ニ} + i}{\boxed{ヌ}}$ を中心とし，半径が $\dfrac{\boxed{ネ}\sqrt{\boxed{ノ}}}{\boxed{ハ}}$ の円周上にある．また，複素数 z, w が表す点をそれぞれ P, Q とし，P, Q は実軸上にないとする．△POQ の面積が最大となるとき，直線 AB は △POQ の面積を $\boxed{ヒ} : \boxed{フ}$ の比に分ける．ただし，O は原点とし，$\boxed{ヒ} < \boxed{フ}$ とする．

(1) $|\alpha| = \sqrt{2^2+4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$ //

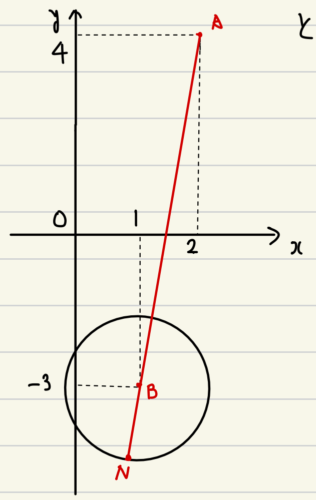
$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{2+4i}{1-3i} = \dfrac{1}{10}(2+4i)(1+3i) = \dfrac{1}{10}(2+6i+4i-12)$



$= \dfrac{1}{10}(-10+10i) = -1+i$ // $= \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3}{4}\pi + i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)$ //

$\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^{20} = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i\sin\dfrac{3}{4}\pi\right)\right\}^{20} = 2^{10}\left(\cos 15\pi + i\sin 15\pi\right) = -1024$ //

(2) 図形的に考えると z は B$(1-3i)$ を中心とする半径2の円上をうごく，$|z-\alpha|$ は円周上の点と A$(2+4i)$ とのキョリと言い換えられるので、左図より z が N の点を示すとき最大で



$AB = \sqrt{7^2+1} = 5\sqrt{2}$，$BN = \sqrt{2}$ より、$|z-\alpha|_{Max} = AN = 6\sqrt{2}$ //

また、

$AB : BN = 5 : 1$ より、$\overrightarrow{AN} = \dfrac{6}{5}\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AB} = (-1, -7)$ より、

$\overrightarrow{AN} = \left(-\dfrac{6}{5}, -\dfrac{42}{5}\right)$ であるので このときの z は

$z = (2+4i) + \left(-\dfrac{6}{5} - \dfrac{42}{5}i\right) = \dfrac{4}{5} - \dfrac{22}{5}i$ //

(3) $\gamma = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とおく、ここで AB上の任意の点 z は媒介変数 $t (\in \mathbb{R})$ を用いて、(2)より、

$z = (2+4i) + t(-1-7i)$

$= (2-t+(4-7t)i)$ とできる。

このとき $\overline{\gamma}z + \gamma\overline{z} = 1$ が常になりたつので、

$(a-bi)\{(2-t)+(4-7t)i\}+(a+bi)\{(2-t)-(4-7t)i\}=1$ ―(＊)

が全ての t で成立するような a, b を求める。

(＊) $\Leftrightarrow (2-t)a+\cancel{(4-7t)ai}-\cancel{b(2-t)i}+b(4-7t)+a(2-t)-\cancel{a(4-7t)i}+\cancel{b(2-t)i}+b(4-7t)=1$

$\Leftrightarrow 2a(2-t)+2b(4-7t)=1$

$\Leftrightarrow (-2a-14b)t+(4a+8b-1)=0$

$at+b=0$ が全ての t で成立するとき、$a=b=0$

よって $\begin{cases} -2a-14b=0 \\ 4a+8b-1=0 \end{cases}$ をといて $\begin{cases} a=\frac{7}{20} \\ b=-\frac{1}{20} \end{cases}$

よって $r=\dfrac{7-i}{20}$ //

$|r|=\frac{1}{20}\sqrt{7^2+1}=\frac{5}{20}\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$

また、$w\neq 0$ の下で、$z=\frac{10}{w}$ であり、$\bar{r}z+r\bar{z}=1$ に代入して、

$\frac{10\bar{r}}{w}+\frac{10r}{\bar{w}}=1$

$\therefore 10\bar{r}\bar{w}+10rw=w\bar{w}$

$\therefore w\bar{w}-10wr-10\bar{w}\bar{r}=0$ ―①

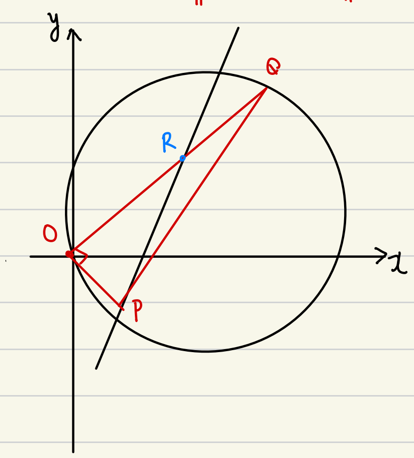
$\therefore (w-10\bar{r})(\bar{w}-10r)=100|r|^2$

$|w-10\bar{r}|^2=100|r|^2$

$|w-10\bar{r}|=10|r|$

$\therefore \left|w-\frac{7+i}{2}\right|=10\times\frac{\sqrt{2}}{4}=\frac{5}{2}\sqrt{2}$

よって w は中心 $\frac{7+i}{2}$ //，半径 $\frac{5}{2}\sqrt{2}$ // の円上にある。



①より w は O を通る。図より

$\triangle OPQ=\frac{1}{2}|w||z|\sin\phi$

$=\frac{1}{2}|wz|\sin\phi$　　$wz=10$

$=\frac{1}{2}\times 10\sin\phi=5\sin\phi$

より $\sin\phi=1$ $\therefore \phi=\frac{\pi}{2}$ のときに最大をとる。

ここで

＊ $\phi=\arg\frac{w}{z}=\arg 10w^2=2\arg w$ より

$\arg w=\frac{\pi}{4}$ で最大となり、

このとき OQ、$y=x$ となる。

また、直線 AB の方程式は $y=7x-10$ なので AB と OQ の交点を R とすると、

$7x-10=x$ $\therefore x=\frac{5}{3}$ より $R\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3}\right)$ ―②

また、Q の座標は円の方程式が $\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$ より、$y=x$ とあわせて、

$\left(x-\frac{7}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$

$\therefore 2x^2-8x=0$ $\therefore x(x-4)=0$ $\therefore x=0,4$

よって $Q(4,4)$ ―③ である。上図より、$\triangle POR:\triangle PQR=OR:RQ=\frac{5}{3}:\left(4-\frac{5}{3}\right)=5:7$ //