ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

近畿大学 医学部

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

1

関数

$$f(x) = \log_5(1 - \cos 2x - 2\cos x)$$

を考える．ただし，x の値は $0 \leqq x < 2\pi$ において $f(x)$ が定義されるもののみを考える．

(1) $t = \cos x$ と置く．$f(x)$ を t を用いて表すと

$$\log_5(\boxed{\text{アイ}}\,t^2 - \boxed{\text{ウ}}\,t + \boxed{\text{エ}})$$

である．

(2) $f(x)$ が定義される x の取りうる値の範囲は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi < x < \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$$

である．

(3) $f(x)$ の最大値は

$$\boxed{\text{ケ}} - \log_5 \boxed{\text{コ}}$$

である．また，$f(x)$ が最大となるとき，$\cos x$ の値は $\dfrac{\boxed{\text{サシ}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である．

(4) $5^{f(x)}$ がとりうる最大の整数の値は $\boxed{\text{セ}}$ である．また，$5^{f(x)}$ が整数となる x の総数は $\boxed{\text{ソ}}$ であり，$5^{f(x)}$ が整数となる x の総和は $\boxed{\text{タ}}\,\pi$ である．

(5) $20^{f(x)}$ がとりうる最大の整数の値は $\boxed{\text{チ}}$ である．また，$20^{f(x)}$ が整数となる x の総数は $\boxed{\text{ツテ}}$ であり，$20^{f(x)}$ が整数となる x の総和は $\boxed{\text{トナ}}\,\pi$ である．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする．

$\boxed{2}$

$0<p<1$ とする．表が出る確率が p ，裏が出る確率が $1-p$ である 1 枚の硬貨 A がある．

(1) $p=\dfrac{1}{3}$ とする． 1 枚の硬貨 A を 3 回続けて投げるとき，表がちょうど 2 回出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}$ であり，少なくとも 1 回表が出る確率は $\dfrac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オカ}}}$ である．

(2) n を 2 以上の自然数とする．1 枚の硬貨 A を n かい続けて投げる試行において，表が 2 回以上続けて出ない事象を X_n とする．

(i) X_n のうち，n 回目に表，n 回目に裏が出る場合の数を，それぞれ a_n, b_n とするとき，

$$a_2=\boxed{\text{キ}},\quad b_2=\boxed{\text{ク}}$$
$$a_3=\boxed{\text{ケ}},\quad b_3=\boxed{\text{コ}}$$
$$a_4=\boxed{\text{サ}},\quad b_4=\boxed{\text{シ}}$$

である．

(ii) $p=\dfrac{1}{2}$ とする．X_n の確率を $P(X_n)$ とするとき，

$$P(X_5)=\frac{\boxed{\text{スセ}}}{\boxed{\text{ソタ}}},\quad P(X_{10})=\frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツテ}}}$$

である．

(3) 1 枚の硬貨 A を続けて投げる試行において，次の 2 つのことが分かっている．

(i) A を 5 回続けて投げる試行において，表がちょうど 3 回出る確率は，表が 3 回以上出てかつ表がちょうど 3 回続けて出る確率より大きい．

(ii) A を 5 回続けて投げる試行において，表がちょうど k 回 $(0 \leqq k \leqq 15)$ 出る確率を比較すると，確率が最大となるのは $k=12$ のときのみである．

このとき，p のとりうる値の範囲は $\dfrac{\boxed{\text{ト}}}{\boxed{\text{ナ}}}<p<\dfrac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$ である．

$\boxed{3}$

原点を O とする座標空間において,3 点 A$(4,0,0,)$, B$(0,4,0)$, C$(0,0,4)$ を考える.

(1) 線分 BC の中点と O の距離は $\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ である. また, △ABC の面積は $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である.

(2) O から平面 ABC に下ろした垂線の長さは $\dfrac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である.

(3) 球面 $x^2+y^2+z^2=8$ と平面 ABC が交わってできる円を D とし, 点 X(p,q,r) が D 上を動くとする.

(i) D の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である.

(ii) $q+r$, qr をそれぞれ p を用いて表すと

$$q+r=\boxed{\text{サ}}-p, \qquad qr=(p-\boxed{\text{シ}})^2$$

である.

(4) p のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{ス}} \leqq p \leqq \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である.

(5) 3 点 P$(p,0,0)$, Q$(0,q,0)$, R$(0,0,r)$ を頂点とする △PQR の面積を S とする. S を p を用いて表すと,

$$S=\sqrt{\boxed{\text{タチ}}\,p^3+\boxed{\text{ツ}}\,p^2-\boxed{\text{テ}}\,p+\boxed{\text{ト}}}$$

であり, S の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である.

$\boxed{1}$

関数

$$f(x) = \log_5(1 - \cos 2x - 3\cos x)$$

を考える．ただし，x の値は $0 \leqq x < 2\pi$ において $f(x)$ が定義されるもののみを考える．

(1) $t = \cos x$ と置く．$f(x)$ を t を用いて表すと

$$\log_5(\boxed{アイ}t^2 - \boxed{ウ}t + \boxed{エ})$$

である．

(2) $f(x)$ が定義される x の取りうる値の範囲は

$$\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\pi < x < \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\pi$$

である．

(3) $f(x)$ の最大値は

$$\boxed{ケ} - \log_5 \boxed{コ}$$

である．また，$f(x)$ が最大となるとき，$\cos x$ の値は $\dfrac{\boxed{サシ}}{\boxed{ス}}$ である．

(4) $5^{f(x)}$ がとりうる最大の整数の値は $\boxed{セ}$ である．また，$5^{f(x)}$ が整数となる x の総数は $\boxed{ソ}$ であり，$5^{f(x)}$ が整数となる x の総和は $\boxed{タ}\pi$ である．

(5) $20^{f(x)}$ がとりうる最大の整数の値は $\boxed{チ}$ である．また，$20^{f(x)}$ が整数となる x の総数は $\boxed{ツテ}$ であり，$20^{f(x)}$ が整数となる x の総和は $\boxed{トナ}\pi$ である．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$，$\log_{10} 7 = 0.8451$ とする．

$\boxed{1}$

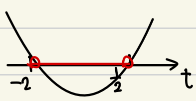
(1) $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ より、

$$1 - \cos 2x - 3\cos x = 1 - (2\cos^2 x - 1) - 3\cos x$$
$$= -2\cos^2 x - 3\cos x + 2$$
$$= -2t^2 - 3t + 2$$

よって $f(x) = \log_5(-2t^2 - 3t + 2)$ //

(2) 真数条件 より、

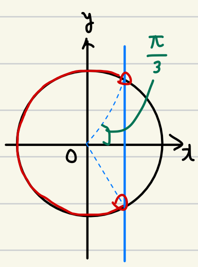
$-2t^2 - 3t + 2 > 0$



∴ $(t+2)(2t-1) < 0$

∴ $-2 < t < \frac{1}{2}$

∴ $-2 < \cos x < \frac{1}{2}$ より $\frac{\pi}{3} < x < \frac{5}{3}\pi$ //



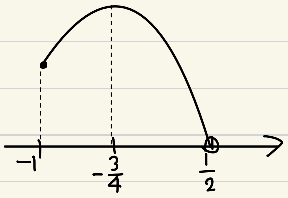
(3) $g(t) = -2t^2 - 3t + 2$ とおくと、

$g(t) = -2\left(t+\frac{3}{4}\right)^2 + \frac{25}{8}$ $\quad \left(-1 \leqq t \leqq \frac{1}{2}\right)$

より、下のグラフより、

$0 < g(t) \leqq \frac{25}{8}$ で $g(t)_{Max} = \frac{25}{8}$

―(*)



$g(t) = \frac{25}{8}$ のとき $f(x)$も最大になるので、

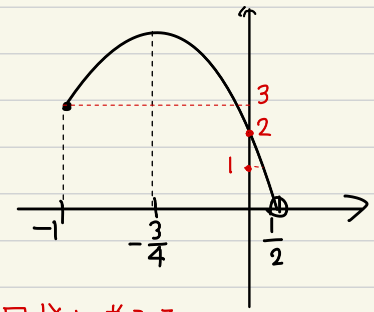
最大値は

$\log_5 \frac{25}{8} = \log_5 25 - \log_5 8 = 2 - 3\log_5 2$

またこのとき $t = \cos x = -\frac{3}{4}$

(4) $5^{f(x)} = g(t)$ である。$\left(a^{\log_a P} = P\right)$

(*)より最大の整数は 3



ここで tと$\cos x$の対応を考えると、$t=-1$のとき x 1つ

$-1 < t < \frac{1}{2}$ のとき x 2つ をふまえると、 ―(※)

図より $g(t) = 3$となる x は3つ

$g(t) = 2, 1$ 〃 xはそれぞれ 2つより

xの総数は $3+2+2 = 7$つ

また、$t=-1$のときは $x = \pi$ で、

$-1 < t < \frac{1}{2}$のとき、単位円を考えると、2つのxの和は 2πより、

総和は

$\pi + 2\pi \times 3 = 7\pi$

(5) (4)と同様に考える。

$20^{f(x)} = \left(5^{\log_5 20}\right)^{f(x)} = \left(5^{f(x)}\right)^{\log_5 20} = \{g(t)\}^{\log_5 20}$

より、$20^{f(x)}$ の最大は、$\left(\frac{25}{8}\right)^{\log_5 20}$

ここで、$\left(\frac{25}{8}\right)^{\log_5 20}$ の整数部分を a とすると、

$a \leqq \left(\frac{25}{8}\right)^{\log_5 20} < a+1$

∴ $\log_{10} a \leqq \underbrace{\log_5 20 \ \log_{10}\frac{25}{8}}_{①} < \log_{10}(a+1)$

①、$\frac{\log_{10} 20}{\log_{10} 5} \times \left(2\log_{10} 5 - 3\log_{10} 2\right) = \frac{1+\log_{10} 2}{1-\log_{10} 2}\left(2 - 5\log_{10} 2\right) = 0.921\ldots$

また、$\log_{10} 8 = 3\log_{10} 2 = 0.9030$

$\log_{10} 9 = 2\log_{10} 3 = 0.9542$ より $a = 8$ であるので、最大の整数は 8 よりとりうる整数値は8個

ここで $g(t) = 3$のとき $20^{\log_5 3}$ について、整数部分をbとすると、

$b \leqq 20^{\log_5 3} < b+1$

∴ $\log_{10} b \leqq \underbrace{(\log_5 3)(\log_{10} 20)}_{②} < \log_{10}(b+1)$

②: $\frac{\log_{10} 3}{1-\log_{10} 2}\left(1+\log_{10} 2\right) = 0.888$ だが、

$\log_{10} 7 = 0.8451$

$\log_{10} 8 = 0.9030$ より 不等式をみたす b は 7より、 $7 < 20^{\log_5 3} < 8$

よって $20^{f(x)} = 8$ なる t は $-1 < t < \frac{1}{2}$ の範囲に 2つ存在し、

$20^{f(x)} = 1 \sim 7$ なる t は $-1 < t < \frac{1}{2}$ の範囲に1つ存在するので、(※)より xの総数は $4 + 2 \times 7 = 18$つで

xの総和は (4)と同様にして $2\pi \times 9 = 18\pi$

$\boxed{2}$

$0 < p < 1$ とする．表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ である１枚の硬貨 A がある．

(1) $p = \dfrac{1}{3}$ とする．１枚の硬貨 A を 3 回続けて投げるとき，表がちょうど 2 回出る確率は $\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$ であり，少なくとも 1 回表が出る確率は $\dfrac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オカ}}$ である．

(2) n を 2 以上の自然数とする．1 枚の硬貨 A を n 回続けて投げる試行において，表が 2 回以上続けて出ない事象を X_n とする．

(i) X_n のうち，n 回目に表，n 回目に裏が出る場合の数を，それぞれ a_n, b_n とするとき，

$$a_2 = \boxed{キ},\quad b_2 = \boxed{ク}$$
$$a_3 = \boxed{ケ},\quad b_3 = \boxed{コ}$$
$$a_4 = \boxed{サ},\quad b_4 = \boxed{シ}$$

である．

(ii) $p = \dfrac{1}{2}$ とする．X_n の確率を $P(X_n)$ とするとき，

$$P(X_5) = \dfrac{\boxed{スセ}}{\boxed{ソタ}},\quad P(X_{10}) = \dfrac{\boxed{チ}}{\boxed{ツテ}}$$

である．

(3) 1 枚の硬貨 A を続けて投げる試行において，次の 2 つのことが分かっている．

(i) A を 5 回続けて投げる試行において，表がちょうど 3 回出る確率は，表が 3 回以上出てかつ表がちょうど 3 回続けて出る確率より大きい．

(ii) A を 15 回続けて投げる試行において，表がちょうど k 回 $(0 \leqq k \leqq 15)$ 出る確率を比較すると，確率が最大となるのは $k = 12$ のときのみである．

このとき，p のとりうる値の範囲は $\dfrac{\boxed{ト}}{\boxed{ナ}} < p < \dfrac{\boxed{ニ}}{\boxed{ヌ}}$ である．

$\boxed{2}$

(1) 表がちょうど2回出る確率は ${}_3C_1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$

少なくとも1回表がでる確率は、全て裏の場合を除けばよいので

$1 - \left(\frac{2}{3}\right)^3 = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$

(2)

(i)

① $n=2$ のとき、a_2 は 1回目は裏のみより $a_2 = 1$

b_2 は 1回目はどちらでもよく、$b_2 = 2$

② $n=3$ のとき a_3 は (おうお)(ううお) の 2パターンで $a_3 = 2$

b_3 は 最初2回が(おお)でなければいいので $b_3 = 2^2 - 1 = 3$

③ $n=4$ のとき、a_4 は 3回目が裏がでて 1回目 2回目は (おお) でなければいいので、$a_4 = 3$

b_4 は $n=3$ のときの $a_3 + b_3$ に等しく、$b_4 = 2+3 = 5$

(ii)

$n \to n+1$ において、$n+1$回目が裏のとき、n回目までで表が2連続以上でていなければいいから、 $b_{n+1} = a_n + b_n$ —Ⓐ

$n+1$回目が表のとき、n回目が裏でないといけないので、 $a_{n+1} = b_n$ —Ⓑ

ⒶⒷより $(a_5, b_5) = (5, 8)$ $(a_6, b_6) = (8, 13)$ $(a_7, b_7) = (13, 21)$

$(a_8, b_8) = (21, 34)$ $(a_9, b_9) = (34, 55)$ $(a_{10}, b_{10}) = (55, 89)$ である。

今、

$P(X_n) = \dfrac{a_n + b_n}{2^n}$ より、 $P(X_5) = \dfrac{5+8}{2^5} = \dfrac{13}{32}$

$$P(X_{10}) = \frac{55+89}{2^{10}} = \frac{144}{2^{10}} = \frac{9}{64}$$

(3)

(i) について、ちょうど表が3回でる確率は ${}_5C_3\, p^3(1-p)^2 = 10p^3(1-p)^2$ —①

3回以上出て、表がちょうど3回続けて出るのは、表→お，裏→う とすると、

(おおおうう)(うおおおう)(ううおおお)(おおおうお)(おうおおお)のどれかより、

この確率は $3 \times p^3(1-p)^2 + 2p^4(1-p)$ —②

①②より このときの条件は、

$$10p^3(1-p)^2 > 3p^3(1-p)^2 + 2p^4(1-p)$$

$$\therefore\ 7(1-p) > 2p$$

$$\therefore\ p < \frac{7}{9} \quad \text{—Ⓒ}$$

(ii) について、表がちょうどk回でる確率をP_kとすると、 $P_k = {}_{15}C_k\, p^k (1-p)^{15-k}$ なので、P_kとP_{k+1}を比較して、

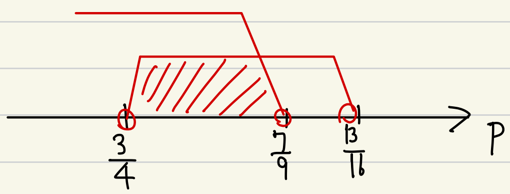
$$\frac{P_{k+1}}{P_k} = \frac{{}_{15}C_{k+1}\, p^{k+1}(1-p)^{14-k}}{{}_{15}C_k\, p^k (1-p)^{15-k}} = \frac{\cancel{15!}}{(k+1)!(14-k)!} \cdot \frac{k!(15-k)!}{\cancel{15!}} \cdot \frac{p}{1-p} = \frac{(15-k)p}{(k+1)(1-p)} \quad \text{—(*)}$$

今、$P_1 < P_2 < \cdots < P_{12} > P_{13} > \cdots > P_{15}$ なので、

(*) について、

$\dfrac{P_{k+1}}{P_k} - 1 = \dfrac{(16p-1)-k}{(k+1)(1-p)}$ より条件は

$$\begin{cases} 16p-1-11 > 0 \\ 16p-1-12 < 0 \end{cases} \quad \therefore\ \frac{3}{4} < p < \frac{13}{16} \quad \text{—Ⓓ}$$



ⒸⒹあわせて、求めるpの範囲は $\dfrac{3}{4} < p < \dfrac{7}{9}$

$\boxed{3}$

原点を O とする座標空間において,3 点 A(4, 0, 0), B(0, 4, 0), C(0, 0, 4) を考える.

(1) 線分 BC の中点と O の距離は $\boxed{\text{ア}}\sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ である. また, △ABC の面積は $\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$ である.

(2) O から平面 ABC に下ろした垂線の長さは $\dfrac{\boxed{\text{オ}}\sqrt{\boxed{\text{カ}}}}{\boxed{\text{キ}}}$ である.

(3) 球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ と平面 ABC が交わってできる円を D とし, 点 X(p, q, r) が D 上を動くとする.

(i) D の半径は $\dfrac{\boxed{\text{ク}}\sqrt{\boxed{\text{ケ}}}}{\boxed{\text{コ}}}$ である.

(ii) $q + r$, qr をそれぞれ p を用いて表すと

$$q + r = \boxed{\text{サ}} - p, \qquad qr = (p - \boxed{\text{シ}})^2$$

である.

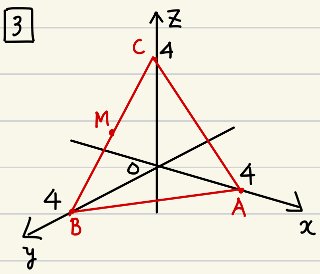
(iii) p のとりうる値の範囲は $\boxed{\text{ス}} \leqq p \leqq \dfrac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ である.

(iv) 3 点 P$(p, 0, 0)$, Q$(0, q, 0)$, R$(0, 0, r)$ を頂点とする △PQR の面積を S とする. S を p を用いて表すと,

$$S = \sqrt{\boxed{\text{タチ}}p^3 + \boxed{\text{ツ}}p^2 - \boxed{\text{テ}}p + \boxed{\text{ト}}}$$

であり, S の最小値は $\dfrac{\boxed{\text{ナ}}\sqrt{\boxed{\text{ニヌ}}}}{\boxed{\text{ネ}}}$ である.

$\boxed{3}$



(1) BC中点をMとすると、M(0, 2, 2)より、

$OM = \sqrt{0+2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$

また AB = BC = CA = $4\sqrt{2}$ より △ABC は一辺 $4\sqrt{2}$ の正三角形なので、

$\triangle ABC = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (4\sqrt{2})^2 = 8\sqrt{3}$

(2) 方針：O-ABCの体積を2通りで表す。

① △OABを底面としたとき、体積Vは

$V = \left(\frac{1}{2} \times 4 \times 4\right) \times 4 \times \frac{1}{3} = \frac{32}{3}$

② △ABCを底面としたとき、高さhとおくと、hはOから△ABCに下ろした垂線の長さに等しい。

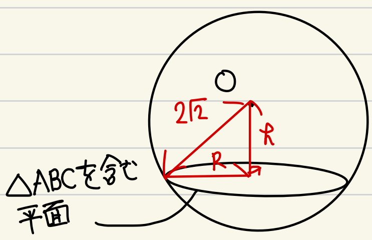
$V = 8\sqrt{3} \times h \times \frac{1}{3} = \frac{8}{3}\sqrt{3}h$

①②より、

$\frac{8}{3}\sqrt{3}h = \frac{32}{3} \quad \therefore h = \frac{4}{3}\sqrt{3}$

(3)

(i) Dの半径をRとおくと、次のような関係が成立する。赤色の直角三角形について三平方の定理より、



$(2\sqrt{2})^2 = h^2 + R^2$

$8 = \frac{16}{3} + R^2 \quad \therefore R = \frac{2\sqrt{6}}{3}$

(ii) $X(p,q,r)$ は平面ABCと球面 $x^2+y^2+z^2=8$ 上にあるので、

$$\begin{cases} p+q+r=4 & \text{—㋐} \\ p^2+q^2+r^2=8 & \text{—㋑} \end{cases}$$

㋐より、 $q+r=4-p$ //

㋑について、

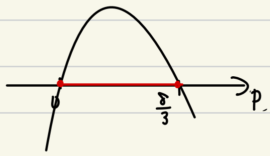
$p^2+(q+r)^2-2qr=8$ ∴ $p^2+(4-p)^2-8=2qr$ ∴ $qr=p^2-4p+4=(p-2)^2$ //

(iii) 方針、(ii)の利用. 解と係数の関係を考える。

(ii)より、q,r は、tについての二次方程式

$$t^2-(4-p)t+(p-2)^2=0$$

の2解である。$q,r\in\mathbb{R}$ より (判別式) $\geqq 0$ なので、



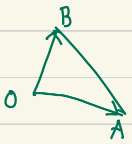
$$D=(4-p)^2-4(p-2)^2\geqq 0$$

∴ $-3p^2+8p\geqq 0$

∴ $p(-3p+8)\geqq 0$

∴ $0\leqq p\leqq \frac{8}{3}$ //

(iv) <復習> $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とすると、



$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$

$\overrightarrow{PQ}=(-p,q,0)$

$\overrightarrow{PR}=(-p,0,r)$ とすると、

$|\overrightarrow{PQ}|^2=p^2+q^2$, $|\overrightarrow{PR}|=p^2+r^2$ $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=p^2$ より、

$$\triangle PQR=\frac{1}{2}\sqrt{(p^2+q^2)(p^2+r^2)-p^4}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(q^2+r^2)p^2+q^2r^2}$$

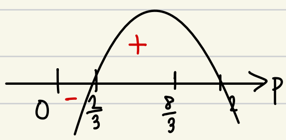
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{p^2(8-p^2)+(p-2)^4}=\sqrt{-2p^3+8p^2-8p+4}$$ //

(iv) $-2p^3+8p^2-8p+4=f(p)$ とする. $\left(0\leqq p\leqq\frac{8}{3}\right)$

$f'(p)=-6p^2+16p-8$

$=-2(3p^2-8p+4)$

$=-2(3p-2)(p-2)$



より、以下の増減表が書ける。

p	0		$\frac{2}{3}$		$\frac{8}{3}$
$f'(p)$		$-$		$+$	
$f(p)$		↘		↗	

よって $f(p)$ の最小は $p=\frac{2}{3}$ で実現するので、Sの最小値は

$$S=\sqrt{f\left(\tfrac{2}{3}\right)}=\sqrt{\frac{44}{27}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{11}{3}}=\frac{2}{9}\sqrt{33}$$ //