ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

日本大学 医学部

N全学統一方式第1期(2/1実施)

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

数学②

次の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{53}$ の 1 つ 1 つには，0 から 9 までの数字または負の符号 $-$ のいずれかが入る．それらを解答用紙の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{53}$ にマークして答えなさい．ただし，分数はすべて既約分数で答え，負の分数のときは符号を分子につけなさい．また，根号の中の数は最も小さい自然数を用いて答えなさい．

[I]

(1) $\varnothing$ は空集合を表すものとする．集合 A, B が

$$A = \{x \mid -x-5 \leqq -3x+1 < 3-x\}$$
$$A \cap B = \varnothing$$
$$A \cup B = \{x \mid x^2 - 7x - 8 < 0\}$$

を満たすとき，$B = \{x \mid \boxed{1} < x < \boxed{2}\}$ である．

(2) 関数 $f(x) = x^2 - 2ax + a + 1$ の最小値を m とする．a がすべての実数値をとって変化するとき，m の最大値は $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$ である．

(3) 30^{30} は $\boxed{5}\ \boxed{6}$ 桁の整数である．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(4) i を虚数単位とする．

$$\frac{(\sqrt{3}+3i)^2}{1+i} = \boxed{7}\sqrt{\boxed{8}}\left(\cos\frac{\boxed{9}}{\boxed{10}\ \boxed{11}}\pi + i\sin\frac{\boxed{9}}{\boxed{10}\ \boxed{11}}\pi\right)$$

である．

(5) $0 < \alpha < \pi$，$0 < \beta < \pi$，$\tan\alpha = \dfrac{3}{7}$，$\tan\beta = \dfrac{2}{5}$ のとき，$\alpha + \beta = \dfrac{\boxed{12}}{\boxed{13}}\pi$ である．

[II]

赤玉が 3 個，青玉が 4 個，白玉が 5 個入った袋から 2 個の玉を同時に取り出す．

(1) 取り出した 2 個の玉の色が異なる確率は $\dfrac{\boxed{14}\,\boxed{15}}{\boxed{16}\,\boxed{17}}$ である．

(2) 取り出した 2 個の玉の色が異なるとき，そのうち 1 個が赤玉である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{18}\,\boxed{19}}{\boxed{20}\,\boxed{21}}$ である．

[III]

t を実数とする．$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = 3$, $|\overrightarrow{\mathrm{OB}}| = 2$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 3$ である $\triangle\mathrm{OAB}$ において，頂点 O から辺 AB に下ろした垂線と辺 AB の交点を H とし，$\mathrm{AH} : \mathrm{HB} = t : (1-t)$ とする．

(1) $t = \dfrac{\boxed{22}}{\boxed{23}}$ である．

(2) $\triangle\mathrm{OAB}$ の垂心を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{\boxed{24}}{\boxed{25}}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \dfrac{\boxed{26}}{\boxed{27}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ である．

[IV]

t を正の定数とする．O を原点とする座標平面上に 2 つの曲線 $C_1 : y = 2^{x+1}$，$C_2 : y = 4^x$ および，直線 $l : x = t$ があり，l と C_1, C_2 の交点をそれぞれ A, B とするとき，$\mathrm{AB} = 9999$ である．

(1) $2^t = \boxed{28}\,\boxed{29}\,\boxed{30}$ である．

(2) C_1, C_2 および l で囲まれた図形を D とする．ただし，D は境界線を含むものとする．ここで，$2^{\boxed{31}} < \boxed{28}\,\boxed{29}\,\boxed{30} < 2^{\boxed{31}+1}$ だから，D に含まれる格子点の座標を (p, q) とするとき，p のとりうる値の範囲は $\boxed{32} \leqq p \leqq \boxed{31}$ である．ただし，格子点とは x 座標と y 座標がともに整数である点のことである．

(3) (2) で定めた図形 D に含まれる格子点は $\boxed{33}\,\boxed{34}\,\boxed{35}\,\boxed{36}$ 個である．

[V]

a を正の定数とする．O を原点とする座標平面上に直線 $l : y = (\sqrt{3}-1)x$ があり，直線 $x = a$ と x 軸，l の交点をそれぞれ A_0, B_0 とする．線分 OA_0 上に点 A_1, 線分 OB_0 上に点 B_1, 線分 $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$ 上に点 C_1 を四角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ が正方形となるようにとる．同様に，負でない整数 k を用いて，線分 OA_k 上に点 A_{k+1}, 線分 OB_k 上に点 B_{k+1}, 線分 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ 上に点 C_{k+1} を四角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}$ が正方形となるようにとる．正方形 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}$ の面積を S_k とし，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_k = T_n$ とする．

(1) 点 A_1 の x 座標は $\dfrac{\sqrt{\boxed{37}}}{\boxed{38}}a$ である．

(2) $\dfrac{T_7}{T_3} = \dfrac{\boxed{39}\,\boxed{40}}{\boxed{41}\,\boxed{42}}$ である．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = 1$ となるのは $a = \dfrac{\sqrt{\boxed{43}}+\sqrt{\boxed{44}}}{\boxed{45}}$ のときである．
(ただし，$\boxed{43} > \boxed{44}$ とする．)

[VI]

関数 $f(x) = (\log x)^2$ がある．O を原点とする座標平面上において，O から曲線 $y = f(x)$ に引いた接線のうち傾きが正のものを l とし，曲線 $y = f(x)$ と直線 l の接点を P とする．また，曲線 $y = f(x)$ の $x \geqq 1$ の部分と，線分 OP および x 軸で囲まれた図形を D とする．ただし，log は自然対数とし，e はその底とする．

(1) 点 P の座標は $\left(e^{\boxed{46}}, \boxed{47}\right)$ である．

(2) 図形 D の面積は $\boxed{48}$ であり，D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\left(\dfrac{\boxed{49}}{\boxed{50}}e^{\boxed{51}} + \dfrac{\boxed{52}}{\boxed{53}}\right)\pi$ である．

数学①

次の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{63}$ の 1 つ 1 つには、0 から 9 までの数字または負の符号 $-$ のいずれかが入る。それらを解答用紙の $\boxed{1}$ ～ $\boxed{63}$ にマークして答えなさい。ただし、分数はすべて既約分数で答え、負の分数のときは符号を分子につけなさい。また、根号の中の数は最も小さい自然数を用いて答えなさい。

[I]

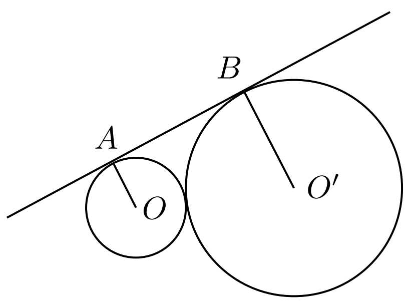
(1) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}+3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}-3}$ の分母を有理化して整理すると、$\dfrac{\sqrt{\boxed{1}\,\boxed{2}}+\boxed{3}\sqrt{\boxed{4}}}{\boxed{5}}$ である。

(2) x, y が $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+2y=4$ を満たすとき x が変化するとき、xy のとりうる値の範囲は $\boxed{6} \leqq xy \leqq \boxed{7}$ である。

(3) 正四面体 ABCD において、辺 BC を 2 : 1 に内分する点を P とし、∠APD の大きさを θ とするとき、$\cos\theta = \dfrac{\boxed{8}}{\boxed{9}\,\boxed{10}}$ である。

(4) 赤球 2 個と白球 1 個が入っている袋 A と赤球 1 個と白球 2 個が入っている袋 B がある。まず袋 A から 1 個の球を取り出して袋 B に入れた後、袋 B から 1 個の球を取り出す。袋 B から取り出された球が赤球であったとき、袋 A から取り出した球も赤球である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{11}}{\boxed{12}}$ である。

(5) 下図のように半径 3 の円 O と半径 5 の円 O′ は外接し、ともに直線 l と接している。直線 l と O, O′ の接点をそれぞれ A, B とするとき、線分 AB の長さは $\boxed{13}\sqrt{\boxed{14}\,\boxed{15}}$ である。



[II]

(1) $x-y+z=0, x-2z+3=0$ を満たすすべての実数 x, y, z に対して、$ax^2+by^2+cz^2=6z-9$ が成り立つとき、$a=\boxed{16}\boxed{17}$, $b=\boxed{18}$, $c=\boxed{19}\boxed{20}$ である。

(2) 3 次方程式 $2x^3+x^2-2x-1=0$ の異なる 3 つの解を α, β, γ とするとき、$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{22}}$, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\boxed{23}\boxed{24}$ である。

(3) 2 直線 $x-2y=0$ と $x-3y-1=0$ のなす角を θ とするとき、$\theta=\dfrac{\boxed{26}}{\boxed{27}}\pi$ である。ただし、$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(4) $r>0$ とする。連立不等式

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ y \leqq -\dfrac{1}{2}x+3 \\ y \leqq -2x+6 \end{cases}$$

の表す領域を D、不等式 $(x-1)^2+(y-2)^2 \leqq r^2$ の表す領域を E とおく。E が D に含まれるとき、r の最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{27}}}{\boxed{28}}$ であり、D が E に含まれるとき、r の最小値は $\boxed{29}\sqrt{\boxed{30}}$ である。

(5) 数列 $\{a_n\}$ を

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{5}, \cdots$$

と定めるとき、$a_{200}=\dfrac{\boxed{31}\boxed{32}}{\boxed{33}\boxed{34}}$ である。

[III]

O を原点とする座標空間に 3 点 $A(2,2,1)$, $B(9,3,3)$, $C(6,y,z)$ があり、3 点 O, B, C は一直線上にあるとする。

(1) $y = \boxed{35}$, $z = \boxed{36}$ である。

(2) 点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA の交点を H とすると、点 H の座標は $(\boxed{37}, \boxed{38}, \boxed{39})$ である。

(3) 点 P が直線 OA 上にあるとき、BP + PC の最小値は $\sqrt{\boxed{40}\,\boxed{41}}$ であり、そのときの点 P の座標は

$$\left(\frac{\boxed{42}\,\boxed{43}}{\boxed{44}}, \frac{\boxed{45}\,\boxed{46}}{\boxed{47}}, \frac{\boxed{48}\,\boxed{49}}{\boxed{50}}\right)$$

である。

[IV]

関数 $f(x)=x^2+\int_0^2 f(t)\,dt$ を考える。曲線 $y=f(x)$ を C とし、曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p, f(p))$ $(p>0)$ における接線を l、点 P を通り、l に垂直な直線を m とする。

(1) $f(x)=x^2-\dfrac{\boxed{51}}{\boxed{52}}$ である。

(2) 曲線 C と直線 m の共有点のうち、点 P と異なる点の x 座標は $-p-\dfrac{\boxed{53}}{\boxed{54}\,p}$ である。

(3) 曲線 C と直線 m で囲まれた図形の面積を S とすると、S の最小値は $\dfrac{\boxed{55}}{\boxed{56}}$ であり，そのときの点 P の座標は

$$\left(\frac{\boxed{57}}{\boxed{58}}, \frac{\boxed{59}\,\boxed{60}\,\boxed{61}}{\boxed{62}\,\boxed{63}}\right)$$

である。

数学②

[I]

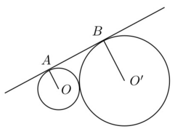
(1) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}+3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}-3}$ の分母を有理化して整理すると、$\dfrac{\sqrt{\boxed{1}\boxed{2}}+\boxed{3}\sqrt{\boxed{4}}}{\boxed{5}}$ である。

(2) x, y が $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x+2y=4$ を満たすとき x が変化するとき、xy のとりうる値の範囲は $\boxed{6} \leqq xy \leqq \boxed{7}$ である。

(3) 正四面体 ABCD において、辺 BC を 2 : 1 に内分する点を P とし、∠APD の大きさを θ とするとき、$\cos\theta = \dfrac{\boxed{8}}{\boxed{9}\boxed{10}}$ である。

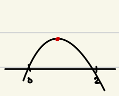
(4) 赤球 2 個と白球 1 個が入っている袋 A と赤球 1 個と白球 2 個が入っている袋 B がある。まず袋 A から 1 個の球を取り出して袋 B に入れた後、袋 B から 1 個の球を取り出す。袋 B から取り出された球が赤球であったとき、袋 A から取り出した球も赤球である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{11}}{\boxed{12}}$ である。

(5) 下図のように半径 3 の円 O と半径 5 の円 O′ は外接し、ともに直線 l と接している。直線 l と O, O′ の接点をそれぞれ A, B とするとき、線分 AB の長さは $\boxed{13}\sqrt{\boxed{14}\boxed{15}}$ である。

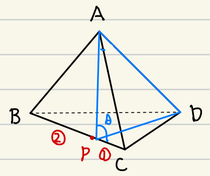


(1) $\dfrac{\sqrt{7}-\sqrt{2}+3}{\sqrt{7}+\sqrt{2}-3} = \dfrac{(\sqrt{7}-\sqrt{2}+3)(\sqrt{7}-\sqrt{2}-3)}{(\sqrt{7}-3+\sqrt{2})(\sqrt{7}-3-\sqrt{2})} = \dfrac{\cancel{9}-2\sqrt{14}\cancel{-9}}{16-6\sqrt{7}-2} = \dfrac{-2\sqrt{14}}{14-6\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{14}}{3\sqrt{7}-7} = \dfrac{\sqrt{14}(3\sqrt{7}+7)}{(3\sqrt{7}-7)(3\sqrt{7}+7)} = \dfrac{3\cdot 7\sqrt{2}+7\sqrt{14}}{63-49} = \dfrac{\sqrt{14}+3\sqrt{2}}{2}$

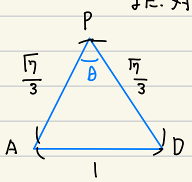
(2) $x = 4-2y \geqq 0$　$y \geqq 0$　∴ $0 \leqq y \leqq 2$ の下で $xy = 2y(2-y)$ より、$0 \leqq xy \leqq 2$



(3)



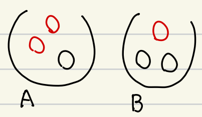
$\vec{AB} = \vec{b}$, $\vec{AC} = \vec{c}$, $\vec{AD} = \vec{d}$ とし $|\vec{b}| = |\vec{c}| = |\vec{d}|$ として一般性を失わない。
ここで $\vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{d} = \vec{d}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}$ であり、
$\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$ であり、
$|\vec{AP}|^2 = \left|\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{c}\right|^2 = \frac{1}{9}+\frac{4}{9}+\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{9}$　∴ $|\vec{AP}| = \frac{\sqrt{7}}{3}$
また、対称性から、$|\vec{DP}| = \frac{\sqrt{7}}{3}$



左図より余弦定理から、

$\cos\theta = \dfrac{\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2-1}{2\cdot\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}} = \dfrac{\frac{5}{9}}{\frac{14}{9}} = \dfrac{5}{14}$

(4)

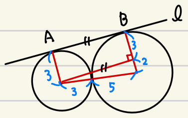


まず Bから とりだされた 球が 赤球 のとき、
(i) Aから 赤球を うつしたとき、
(ii) 〃 白球 〃 の 2パターンが 存在する。

(i) の確率は、$\frac{2}{3}\times\frac{2}{4} = \frac{1}{3}$

(ii) の確率は、$\frac{1}{3}\times\frac{1}{4} = \frac{1}{12}$　よって 求める条件つき確率は $\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{12}} = \dfrac{4}{5}$

(5)



左図を考えて三平方の定理より、
$8^2 - 2^2 = AB^2 = 60$　∴ $AB = 2\sqrt{15}$

[II]

(1) $x-y+z=0$, $x-2z+3=0$ を満たすすべての実数 x, y, z に対して、$ax^2+by^2+cz^2=6z-9$ が成り立つとき、$a=$ $\boxed{16}\boxed{17}$, $b=$ $\boxed{18}$, $c=$ $\boxed{19}\boxed{20}$ である。

(2) 3 次方程式 $2x^3+x^2-2x-1=0$ の異なる 3 つの解を α, β, γ とするとき、
$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=\dfrac{\boxed{21}}{\boxed{22}}$, $\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\boxed{23}\boxed{24}$ である。

(3) 2 直線 $x-2y=0$ と $x-3y-1=0$ のなす角を θ とするとき、$\theta=\dfrac{\boxed{26}}{\boxed{27}}\pi$ である。ただし、$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(4) $r>0$ とする。連立不等式

$$\begin{cases} x \geqq 0 \\ y \geqq 0 \\ y \leqq -\dfrac{1}{2}x+3 \\ y \leqq -2x+6 \end{cases}$$

の表す領域を D、不等式 $(x-1)^2+(y-2)^2 \leqq r^2$ の表す領域を E とおく。E が D に含まれるとき、r の最大値は $\dfrac{\sqrt{\boxed{27}}}{\boxed{28}}$ であり、D が E に含まれるとき、r の最小値は $\boxed{29}\sqrt{\boxed{30}}$ である。

(5) 数列 $\{a_n\}$ を

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{4}{4}, \frac{3}{4}, \frac{2}{4}, \frac{1}{4}, \frac{5}{5}, \cdots$$

と定めるとき、$a_{200}=\dfrac{\boxed{31}\boxed{32}}{\boxed{33}\boxed{34}}$ である。

(1) $\begin{cases} x-y+z=0 \\ x-2z+3=0 \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} x=2z-3 \\ y=3z-3 \end{cases}$ より、与式に代入して

$a(2z-3)^2+b(3z-3)^2+cz^2=6z-9$

$\therefore (4a+9b+c)z^2+(-12a-18b-6)z+(9a+9b+9)=0$

これが全ての z で成りたつとき、

$\begin{cases} 4a+9b+c=0 \\ -12a-18b-6=0 \\ 9a+9b+9=0 \end{cases}$ $\therefore (a, b, c)=(-2, \ , -1)$

(2) $2x^3+x^2-2x-1=0$ について解と係数の関係より、

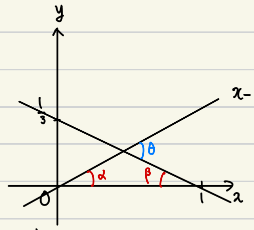
$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{1}{2} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=-1 \quad -(*) \\ \alpha\beta\gamma=\dfrac{1}{2} \end{cases}$

(*)の利用!!

$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=(\alpha+\beta+\gamma)^2-2(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2-2(-1)=\dfrac{9}{4}$

$\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=\dfrac{\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha}{\alpha\beta\gamma}=\dfrac{-1}{\frac{1}{2}}=-2$

(3)

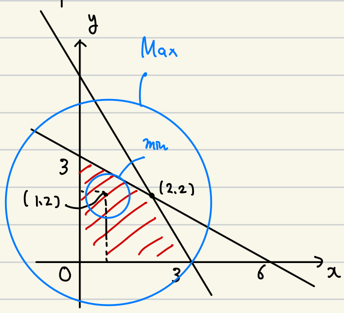


$\theta=\alpha+\beta$ である。

$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}$　$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$ より、

$\tan\theta=\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=\dfrac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}}=1$　$\therefore \theta=\dfrac{\pi}{4}$

(4)



D の領域は左図の赤斜線部分。E が D に含まれるとき、r が最大をとるときは、円と $y=-\frac{1}{2}x+3$ が接するときで、点と直線のキョリ公式より、

$r=\dfrac{|1+4-6|}{\sqrt{1+2^2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

D が E に含まれるときの r の最小は円が $(3,0)$ を通るときであり、このとき、

$r^2=(3-1)^2+(0-2)^2=8$　$\therefore r=2\sqrt{2}$

(5) 分母が k である項のまとまりを第 k 群とおく。k 群には項が k 個含まれているので、第200項目が N 群に含まれているとき、

$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} k < 200 \leqq \sum_{k=1}^{N} k$ ← 不等式評価

$\therefore \dfrac{1}{2}N(N-1) < 200 \leqq \dfrac{1}{2}N(N+1)$　これをみたす N は $N=20$ であり、a_{200} は第20群目に含まれる。

ここで a_{200} が 20群目の第 n 項目にあるとすると、

$200=\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{19} k\right)+n=190+n$　$\therefore n=10$ より、a_{200} は第20群目の10項なので、

第 N 群 n 項は $\dfrac{N-(n-1)}{N}$ に注意して、$a_{200}=\dfrac{11}{20}$

[III]

O を原点とする座標空間に 3 点 A$(2, 2, 1)$, B$(9, 3, 3)$, C$(6, y, z)$ があり、3 点 O, B, C は一直線上にあるとする。

(1) $y = \boxed{35}$, $z = \boxed{36}$ である。

(2) 点 B から直線 OA に下ろした垂線と直線 OA の交点を H とすると、点 H の座標は $(\boxed{37}, \boxed{38}, \boxed{39})$ である。

(3) 点 P が直線 OA 上にあるとき、BP + PC の最小値は $\sqrt{\boxed{40}\boxed{41}}$ であり、そのときの点 P の座標は

$$\left(\frac{\boxed{42}\boxed{43}}{\boxed{44}}, \frac{\boxed{45}\boxed{46}}{\boxed{47}}, \frac{\boxed{48}\boxed{49}}{\boxed{50}}\right)$$

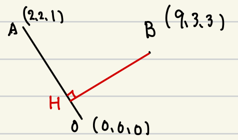
である。

(1) わざわざここまで考える必要ないけど…

$\overrightarrow{OC} = k\overrightarrow{OB}$ $(k \in \mathbb{R})$ より

$$\begin{pmatrix} 6 \\ y \\ z \end{pmatrix} = k\begin{pmatrix} 9 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \begin{cases} 6 = 9k \\ y = 3k \\ z = 3k \end{cases} \quad \therefore k = \frac{2}{3} \quad y = z = \underline{2}$$

(2)



$\overrightarrow{OH} = h\overrightarrow{OA}$ $(h \in \mathbb{R})$ とできるので

H$(2h, 2h, h)$ である。

ここで条件より、$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{BH}$ であり、

$\overrightarrow{BH} = (2h-9, 2h-3, h-3)$ より、

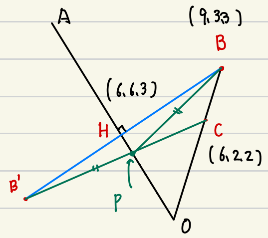
$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BH} = 2(2h-9) + 2(2h-3) + (h-3) = 0$

$\therefore$ $9h - 27 = 0$ $\therefore h = 3$

よって

H$(\underline{6, 6, 3})$

(3)



B の OA に関して対称な点を B' とすると、左図のようになり、BP + PC = B'P + PC ≧ B'C

である。BB' の中点が H であることに注意すると、B'$(3, 9, 3)$ であり、

$\overrightarrow{B'C} = (3, -7, -1)$ より BP + PC の最小は $|\overrightarrow{B'C}| = \sqrt{3^2 + (-7)^2 + (-1)^2} = \underline{\sqrt{59}}$

また、このときの P は B'C と OA の交点であり、

P は直線 OA 上かつ直線 B'C 上にあることに注意すると、

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OP} = \beta\overrightarrow{OC} + (1-\beta)\overrightarrow{OB'} \end{cases}$$ とでき、各成分を比較して、

$$\alpha\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + (1-\beta)\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \therefore \begin{cases} 2\alpha = 3\beta + 3 \\ 2\alpha = -7\beta + 9 \\ \alpha = 3 - \beta \end{cases} \quad \therefore (\alpha, \beta) = \left(\frac{12}{5}, \frac{3}{5}\right) \text{ より、}$$

$$P\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{12}{5}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} \frac{24}{5} \\ \frac{24}{5} \\ \frac{12}{5} \end{pmatrix}}$$

[IV]

関数 $f(x) = x^2 + \int_0^2 f(t)\,dt$ を考える。曲線 $y = f(x)$ を C とし、曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(p, f(p))$ $(p > 0)$ における接線を l、点 P を通り、l に垂直な直線を m とする。

(1) $f(x) = x^2 - \dfrac{\boxed{51}}{\boxed{52}}$ である。

(2) 曲線 C と直線 m の共有点のうち、点 P と異なる点の x 座標は $-p - \dfrac{\boxed{53}}{\boxed{54}\,p}$ である。

(3) 曲線 C と直線 m で囲まれた図形の面積を S とすると、S の最小値は $\dfrac{\boxed{55}}{\boxed{56}}$ であり，そのときの点 P の座標は

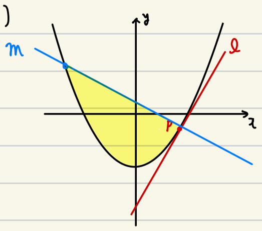
$$\left(\frac{\boxed{57}}{\boxed{58}},\ \frac{\boxed{59}\,\boxed{60}\,\boxed{61}}{\boxed{62}\,\boxed{63}}\right)$$

である。

(1) $\int_0^2 f(t)\,dt = a$ とすると、$f(x) = x^2 + a$ より、$\int_0^2 (x^2+a)\,dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + ax\right]_0^2 = \frac{8}{3} + 2a = a$ ∴ $a = -\frac{8}{3}$ より、$f(x) = x^2 - \frac{8}{3}$

定数は文字でおきかえる!

(2)



$f'(x) = 2x$ より、m: $y = -\frac{1}{2p}(x-p) + p^2 - \frac{8}{3} = -\frac{x}{2p} + p^2 - \frac{13}{6}$

法線は
$y = \frac{1}{f'(p)}(x-p) + f(p)$ で与えられる!

これと $y = f(x)$ の交点は、

$$x^2 - \frac{8}{3} = -\frac{x}{2p} + p^2 - \frac{13}{6}$$

$$\therefore\ x^2 + \frac{x}{2p} - p^2 - \frac{1}{2} = 0$$

$$\therefore\ (x-p)\left(x + p + \frac{1}{2p}\right) = 0 \qquad \therefore\ x = -p - \frac{1}{2p}$$

(3)

$$S = \int_{-p-\frac{1}{2p}}^{p} \left\{\left(-\frac{x}{2p} + p^2 - \frac{13}{6}\right) - \left(x^2 - \frac{8}{3}\right)\right\} dx$$

$$= \int_{-p-\frac{1}{2p}}^{p} -(x-p)\left(x + p + \frac{1}{2p}\right) dx$$

$\frac{1}{6}$公式　$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = -\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$

$$= \frac{1}{6}\left(2p + \frac{1}{2p}\right)^3 \geqq \frac{1}{6}\left(2\sqrt{2p \cdot \frac{1}{2p}}\right)^3 = \frac{4}{3}$$

等号成立は $2p = \frac{1}{2p}$ ∴ $p = \frac{1}{2}$ のときより、
S の最小値は $\frac{4}{3}$ であり、P の座標は $\left(\frac{1}{2}, -\frac{29}{12}\right)$

数学①

[I]

(1) $\varnothing$ は空集合を表すものとする．集合 A, B が

$$A = \{x \mid -x-5 \leqq -3x+1 < 3-x\}$$
$$A \cap B = \varnothing$$
$$A \cup B = \{x \mid x^2-7x-8<0\}$$

を満たすとき，$B = \{x \mid \boxed{1} < x < \boxed{2}\}$ である．

(2) 関数 $f(x) = x^2 - 2ax + a + 1$ の最小値を m とする．a がすべての実数値をとって変化するとき，m の最大値は $\dfrac{\boxed{3}}{\boxed{4}}$ である．

(3) 30^{30} は $\boxed{5}\ \boxed{6}$ 桁の整数である．ただし，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(4) i を虚数単位とする．

$$\frac{(\sqrt{3}+3i)^2}{1+i} = \boxed{7}\sqrt{\boxed{8}}\left(\cos\frac{\boxed{9}}{\boxed{10}\,\boxed{11}}\pi + i\sin\frac{\boxed{9}}{\boxed{10}\,\boxed{11}}\pi\right)$$

である．

(5) $0<\alpha<\pi$，$0<\beta<\pi$，$\tan\alpha = \dfrac{3}{7}$，$\tan\beta = \dfrac{2}{5}$ のとき，$\alpha+\beta = \dfrac{\boxed{12}}{\boxed{13}}\pi$ である．

(1)

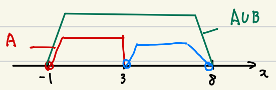
まず、Aの集合を整理する。

簡単な条件にかえる。

$$\begin{cases} -x-5 \leqq -3x+1 \\ -3x+1 < 3-x \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x \leqq 3 \\ -1 < x \end{cases} \quad \therefore -1 < x \leqq 3$$

A∪B についても、

$$x^2-7x-8<0 \quad \therefore (x-8)(x+1)<0 \quad \therefore -1<x<8$$



$A \cap B = \phi$ より 上の数直線から、$B = \{x \mid 3 < x < 8\}$

(2) $f(x) = (x-a)^2 - a^2 + a + 1$ より、$m = -a^2 + a + 1$

$\therefore\ m = -\left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{4}$ より m の Max $= \frac{5}{4}$

(3) 30^{30} を m 桁の数とすると、

定義です！

$$\boxed{10^{m-1} \leqq 30^{30} < 10^m}$$

$\therefore\ m-1 \leqq 30\log_{10}30 < m$

$\therefore\ m-1 \leqq 30(1+\log_{10}3) < m$

$\therefore\ m-1 \leqq 30 \times 14771 < m$

$m-1 \leqq 44.313 < m$

より $m = 45$ なので 45桁の整数、

(4) 各々極形式にしましょう！

ド・モアブル

$$\sqrt{3}+3i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right) \text{ より}$$
$$\frac{(\sqrt{3}+3i)^2}{1+i} = \frac{12\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2}{3}\pi\right)}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)} = 6\sqrt{2}\left(\cos\frac{5}{12}\pi + i\sin\frac{5}{12}\pi\right)$$

(5) 加法定理を使う！

ハイ 確認！

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{3}{7}+\frac{2}{5}}{1-\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{5}} = \frac{\frac{15+14}{35}}{\frac{29}{35}} = 1$$

$\tan\alpha, \tan\beta > 0$　$0<\alpha, \beta<\pi$ より、$0<\alpha, \beta<\frac{\pi}{2}$ であり、$0<\alpha+\beta<\pi$ より

$$\alpha+\beta = \frac{\pi}{4}$$

[II]

赤玉が 3 個，青玉が 4 個，白玉が 5 個入った袋から 2 個の玉を同時に取り出す．

(1) 取り出した 2 個の玉の色が異なる確率は $\dfrac{\boxed{14}\,\boxed{15}}{\boxed{16}\,\boxed{17}}$ である．

(2) 取り出した 2 個の玉の色が異なるとき，そのうち 1 個が赤玉である条件付き確率は $\dfrac{\boxed{18}\,\boxed{19}}{\boxed{20}\,\boxed{21}}$ である．

(1) 全ての取り出し方は ${}_{12}C_2 = 66$ 通り.

異なるとき (● ●)(● ○)(● ○) の 3パターンあり.

(● ●) のとき $3\times4 = 12$ 通り

(● ○) のとき $3\times5 = 15$ 通り

(● ○) のとき $4\times5 = 20$ 通り より 求める確率は $\dfrac{12+15+20}{66} = \dfrac{47}{66}$ −(14〜17)

(2) 上を参照して $\dfrac{12+15}{47} = \dfrac{27}{47}$ −(18〜21)

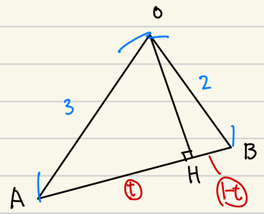
[III]

t を実数とする．$|\overrightarrow{OA}|=3$, $|\overrightarrow{OB}|=2$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3$ である $\triangle$OAB において，頂点 O から辺 AB に下ろした垂線と辺 AB の交点を H とし，AH : HB $= t:(1-t)$ とする．

(1) $t=\dfrac{\boxed{22}}{\boxed{23}}$ である．

(2) $\triangle$OAB の垂心を P とするとき，$\overrightarrow{OP}=\dfrac{\boxed{24}}{\boxed{25}}\overrightarrow{OA}+\dfrac{\boxed{26}}{\boxed{27}}\overrightarrow{OB}$ である．

(1)



$\cos\angle AOB=\theta$ とすると

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=3=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\cos\theta=6\cos\theta$　　$\therefore \cos\theta=\frac{1}{2}$

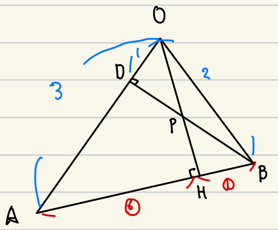
$\therefore \theta=\frac{\pi}{3}$ である．

また、$\overrightarrow{OH}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ であり、$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0&=\{(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}\}\cdot\{\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}\}\\&=(1-t)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}-(1-t)|\overrightarrow{OA}|^2+t|\overrightarrow{OB}|^2-t\,\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\\&=3(1-t)-9(1-t)+4t-3t\\&=-6+7t\end{aligned}$$

$\therefore\ t=\frac{6}{7}$

(2) 幾何的に解くのが一番はやい!?



内積のイミを考える.

$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OA}|\cos\angle AOB$

$=|\overrightarrow{OD}||\overrightarrow{OA}|=3|\overrightarrow{OD}|=3$　　$\therefore |\overrightarrow{OD}|=1$

よって メネラウスの定理 より、

$$\frac{OD}{DA}\times\frac{AB}{BH}\times\frac{HP}{PO}=1$$

$\therefore \frac{1}{2}\times\frac{7}{1}\times\frac{HP}{PO}=1$　　$\therefore 7HP=2PO$　　$\therefore HP:PO=2:7$

よって $\overrightarrow{OP}=\frac{7}{9}\overrightarrow{OH}=\frac{7}{9}\left(\frac{1}{7}\overrightarrow{OA}+\frac{6}{7}\overrightarrow{OB}\right)=\frac{1}{9}\overrightarrow{OA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{OB}$

[IV]

t を正の定数とする．O を原点とする座標平面上に 2 つの曲線 $C_1 : y = 2^{x+1}$，$C_2 : y = 4^x$ および，直線 $l : x = t$ があり，l と C_1, C_2 の交点をそれぞれ A, B とするとき，AB = 9999 である．

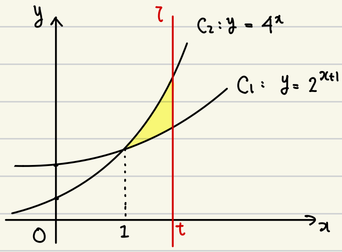
(1) $2^t = \boxed{28}\boxed{29}\boxed{30}$ である．

(2) C_1, C_2 および l で囲まれた図形を D とする．ただし，D は境界線を含むものとする．ここで，$2^{\boxed{31}} < \boxed{28}\boxed{29}\boxed{30} < 2^{\boxed{31}+1}$ だから，D に含まれる格子点の座標を (p, q) とするとき，p のとりうる値の範囲は $\boxed{32} \leqq p \leqq \boxed{31}$ である．ただし，格子点とは x 座標と y 座標がともに整数である点のことである．

(3) (2) で定めた図形 D に含まれる格子点は $\boxed{33}\boxed{34}\boxed{35}\boxed{36}$ 個である．

場合分けが生じる．

(1)



$0 < x \leqq 1$ のとき $4^x \geqq 2^{x+1}$ だが，$4^x - 2^{x+1} = 9999$ となる x は存在しないので，$x > 1$ で考える．このとき

$x = t$ のとき

$$\mathrm{AB} = 4^t - 2^{t+1} = 9999$$
$$\therefore\ 2^{2t} - 2\cdot 2^t - 9999 = 0$$
$$\therefore\ (2^t)^2 - 2\cdot 2^t + 1 = 10000$$
$$\therefore\ (2^t - 1)^2 = 100^2$$
$$\therefore\ 2^t = 1 \pm 100 \quad \therefore\ 2^t = 101 \quad \boxed{(\because\ 2^t > 0)}$$

(2) $2^6 = 64 < 101 < 2^{6+1} = 128$ であるので $6 < t < 7$ であるので，p のとりうる値の範囲は，$1 \leqq p \leqq 6$

(3) $p = k$ $(1 \leqq k \leqq 6)$ において y のとりうる範囲は，$2^{k+1} \leqq y \leqq 4^k$ より，$p = k$ での格子点の数は，

$(4^k - 2^{k+1} + 1)$ 個

よって求める格子点の数は

$3 \leqq y \leqq 5$ のとき 3 個だから，+1 すると検算すればよい．(5−3+1 という

$$\sum_{k=1}^{6}(4^k - 2^{k+1} + 1) = \frac{4^6 - 1}{4 - 1}\cdot 4 - 2\cdot\frac{2^6 - 1}{2 - 1}\cdot 2 + 6$$
$$= 5460 - 252 + 6$$
$$= 5214\text{ 個}$$

[V]

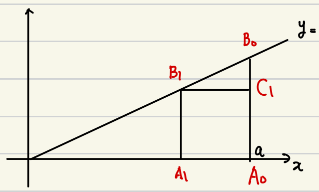
a を正の定数とする．O を原点とする座標平面上に直線 $l : y = (\sqrt{3}-1)x$ があり，直線 $x = a$ と x 軸，l の交点をそれぞれ A_0, B_0 とする．線分 OA_0 上に点 A_1, 線分 OB_0 上に点 B_1, 線分 $\mathrm{A}_0\mathrm{B}_0$ 上に点 C_1 を四角形 $\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1\mathrm{C}_1$ が正方形となるようにとる．同様に，負でない整数 k を用いて，線分 OA_k 上に点 A_{k+1}, 線分 OB_k 上に点 B_{k+1}, 線分 $\mathrm{A}_k\mathrm{B}_k$ 上に点 C_{k+1} を四角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}$ が正方形となるようにとる．正方形 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{B}_{k+1}\mathrm{C}_{k+1}$ の面積を S_k とし，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_k = T_n$ とする．

(1) 点 A_1 の x 座標は $\dfrac{\sqrt{\boxed{37}}}{\boxed{38}}a$ である．

(2) $\dfrac{T_7}{T_3} = \dfrac{\boxed{39}\,\boxed{40}}{\boxed{41}\,\boxed{42}}$ である．

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = 1$ となるのは $a = \dfrac{\sqrt{\boxed{43}} + \sqrt{\boxed{44}}}{\boxed{45}}$ のときである．
(ただし，$\boxed{43} > \boxed{44}$ とする．)

(1)



$A_1(a_1, 0)$ とおくと $B_1(a_1, (\sqrt{3}-1)a_1)$

ここで条件は、$A_1A_0 = A_1B_1$ だから (言いかえ)

$a - \cancel{a_1} = (\sqrt{3}\cancel{-1})a_1$

$\therefore\ a_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a$

(2) 漸化式を立てる。

$a_0 = a$ より

A_n の x 座標を a_n とすると、(1)と同様のギロンから、$a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}a_n\ (n=1,2,3,\cdots)$　$\therefore\ a_n = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^n a\ (n \geqq 1)$

また、$S_n = (a_n - a_{n+1})^2$

$= a_n^2\left(1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \dfrac{(\sqrt{3}-1)^2}{3}\cdot\dfrac{a^2}{3^n} = (\sqrt{3}-1)^2a^2\cdot\dfrac{1}{3^{n+1}}$

より、

$T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} S_k = (\sqrt{3}-1)^2a^2\cdot\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{3^{k+1}} = (\sqrt{3}-1)^2a^2\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}\cdot\frac{1}{3}$

$= \dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2a^2\left\{1-\dfrac{1}{3^{n+1}}\right\}$ — (*)

よって $\dfrac{T_7}{T_3} = \dfrac{\cancel{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2a^2}\left(1-\frac{1}{3^8}\right)}{\cancel{\frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2a^2}\left(1-\frac{1}{3^4}\right)} = \dfrac{\cancel{1-\frac{1}{3^4}}}{\cancel{1-\frac{1}{3^4}}}\cdot\left(1+\dfrac{1}{3^4}\right) = \dfrac{82}{81}$

(3) (*) より、

$\displaystyle\lim_{n\to\infty} T_n = \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)^2a^2 = 1$

より、$a^2 = \dfrac{2}{(\sqrt{3}-1)^2}$　$\therefore\ a = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$　($\because a>0$)

$= \dfrac{1}{2}\sqrt{2}(\sqrt{3}+1) = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

[VI]

関数 $f(x) = (\log x)^2$ がある．O を原点とする座標平面上において，O から曲線 $y = f(x)$ に引いた接線のうち傾きが正のものを l とし，曲線 $y = f(x)$ と直線 l の接点を P とする．また，曲線 $y = f(x)$ の $x \geqq 1$ の部分と，線分 OP および x 軸で囲まれた図形を D とする．ただし，log は自然対数とし，e はその底とする．

(1) 点 P の座標は $\left(e^{\boxed{46}}, \boxed{47}\right)$ である．

(2) 図形 D の面積は $\boxed{48}$ であり，D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積は $\left(\frac{\boxed{49}}{\boxed{50}}e^{\boxed{51}} + \frac{\boxed{52}}{\boxed{53}}\right)\pi$ である．

(1) まず $f'(x) = 2\log x \cdot \frac{1}{x} = \frac{2\log x}{x}$ であり、接点のx座標をpとすると、その方程式は

$y = \frac{2\log p}{p}(x-p) + (\log p)^2$

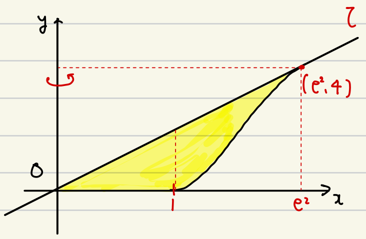
$= \frac{2\log p}{p}x + (\log p)^2 - 2\log p$

接線を求めるときの定石.

これが O(0,0) を通るため、$(\log p)^2 - 2\log p = 0$ ∴ $\log p = 0, 2$

傾き正より、$\log p > 0$ ゆえ、$\log p = 2$ ∴ $p = e^2$ であるから、$P(e^2, 4)$

(2) Dの領域は以下の図のようになる。



①: $4 \times e^2 \times \frac{1}{2} = 2e^2$

②: $\int_1^{e^2} (\log x)^2 \, dx$

$= \left[x(\log x)^2\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} 2\cancel{x}\log x \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$

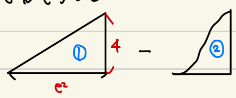
$= 4e^2 - 2\left[x\log x - x\right]_1^{e^2}$

$= 4e^2 - 2\{(2e^2 - e^2) - (0 - 1)\}$

$= 2e^2 - 2$

この面積をSとすると、

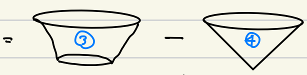
S =



よって $S = 2e^2 - (2e^2 - 2) = 2$

また、1回転させてできる体積をVとすると、

V =



③: $y = (\log x)^2$ より、$dy = \frac{2\log x}{x}dx$ より、

$\pi\int_0^4 x^2 \, dy = \pi\int_1^{e^2} x^2 \cdot \frac{2\log x}{x} \, dx = 2\pi\int_1^{e^2} x\log x \, dx$

$= 2\pi\left\{\left[\frac{1}{2}x^2\log x\right]_1^{e^2} - \int_1^{e^2} \frac{1}{2}x \, dx\right\}$

$= 2\pi\left\{\frac{1}{2}e^4 \cdot 2 - \frac{1}{4}(e^4 - 1)\right\}$

$= 2\pi\left(\frac{3}{4}e^4 + \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{3}{2}e^4 + \frac{1}{2}\right)\pi$

④: $\frac{1}{3}\pi e^4 \times 4 = \frac{4}{3}\pi e^4$

以上、

$V = \left(\frac{1}{6}e^4 + \frac{1}{2}\right)\pi$