ゴウカライズ
数学
2025
大学入試 解答速報

福岡大学
医学部医学科
(2/2実施)

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

[I]

次の $\boxed{}$ をうめよ．答えは解答用紙の該当欄に記入せよ．

(i) 三角形の頂点を反時計回り (時計の針の回転と逆向き) に A, B, C とする．三角形の頂点を動く点 P は 1 秒毎に $\dfrac{1}{6}$ の確率で反時計回りに隣の頂点に移動し，$\dfrac{1}{6}$ の確率で時計回りに隣の頂点に移動し，$\dfrac{2}{3}$ の確率でその場に留まる．P が最初 A の位置にいるとき，2 秒後に P が B の位置にいる確率は $\boxed{(1)}$ であり，最初の 3 秒の間に P が一度も B の位置にいない確率は $\boxed{(2)}$ である．

(ii) 四角形 OABC において，辺 OA の中点を P，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を Q，辺 BC を 2 : 3 に内分する点を R とする．$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \boxed{(3)}$ である．また，OC 上に点 S をとる．3 点 P,Q,R を通る平面 PQR 上に S があるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} = \boxed{(4)}$ である．

(iii) 放物線の問題 $C : y = x^2 + 5x + 4$ が直線 $\ell_1 : y = 3x + k + 1$ と異なる 2 点で交わり，直線 $\ell_2 : y = 3x + k$ とも異なる 2 点で交わるとき，k の値の範囲は $\boxed{(5)}$ である．
この範囲の k に対して C と ℓ_1 の 2 つの交点と，C と ℓ_2 の 2 つの交点を頂点とする四角形の面積が 2 となる k の値は $\boxed{(6)}$ である．

[II]

次の $\boxed{}$ をうめよ．答えは解答用紙の該当欄に記入せよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{12}n(n+7)$ を満たすとき，一般項は $a_n = \boxed{(1)}$ である．
また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{2025} \cos(\pi a_n)$ の値は $\boxed{(2)}$ である．

(2) 10 個のデータ $-5, -2, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15$ の平均値を m，中央値を M とすると，$(m, M) = \boxed{(3)}$ である．この 10 個のデータに M と異なる 1 個のデータ a を加えてできる 11 個のデータの平均値を m'，中央値を M' とする．このとき，$\dfrac{m'-m}{M'-M} = 101$ となる a の値をすべて求めると $a = \boxed{(4)}$ である．

[III] (記述問題)

a を正の定数とする．2 曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{\cos x}\ \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$C_2 : y = a\sin x\ \left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ について，次の問に答えよ．

(1) C_1 と C_2 の共有点がただ 1 つであるとき，その共有点における C_1 の接線 ℓ の方程式を求めよ．

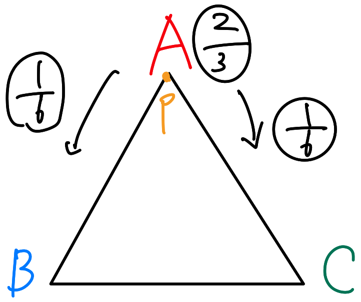
(2) (i) のとき，曲線 C_1, C_2 および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

[I]

次の $\boxed{}$ をうめよ．答えは解答用紙の該当欄に記入せよ．

(i) 三角形の頂点を反時計回り (時計の針の回転と逆向き) に A, B, C とする．三角形の頂点を動く点 P は 1 秒毎に $\frac{1}{6}$ の確率で反時計回りに隣の頂点に移動し，$\frac{1}{6}$ の確率で時計回りに隣の頂点に移動し，$\frac{2}{3}$ の確率でその場に留まる．P が最初 A の位置にいるとき，2 秒毎に P が B の位置にいる確率は $\boxed{(1)}$ であり，最初の 3 秒の間に P が一度も B の位置にいない確率は $\boxed{(2)}$ である．

(i)



2秒後にPがBにいる確率

視覚化して考えてみよう！

0秒	1秒	2秒	
A	A	→ B	$\frac{2}{3} \times \frac{1}{6}$
	B	→ B	$\frac{1}{6} \times \frac{2}{3}$
	C	→ B	$\frac{1}{6} \times \frac{1}{6}$

これらを全て足し合わせると

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{36} = \frac{1}{4}$$

$\underline{\frac{1}{4}}$

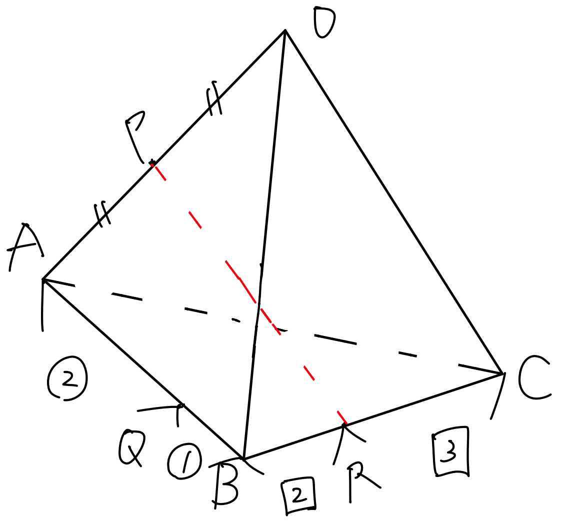
また，3秒の間に一度もBにいない確率

言い換えると…3秒間AorCにずっといる確率

0秒(スタート)は，PはBにいないため，1秒，2秒，3秒の時点からAorCからBに移動する$\frac{1}{6}$の確率を1から引いたものをかければよい．

つまり，$\left(1-\frac{1}{6}\right)^3 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \underline{\frac{125}{216}}$

(ii) 四角形 OABC において，辺 OA の中点を P，辺 AB を 1 : 2 に内分する点を Q，辺 BC を 2 : 3 に内分する点を R とする．$\overrightarrow{PR}$ を $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{PR} = \boxed{(3)}$ である．また，OC 上に点 S をとる．3 点 P,Q,R を通る平面 PQR 上に S があるとき，$\overrightarrow{OS}$ を $\overrightarrow{OC}$ を用いて表すと，$\overrightarrow{OS} = \boxed{(4)}$ である．



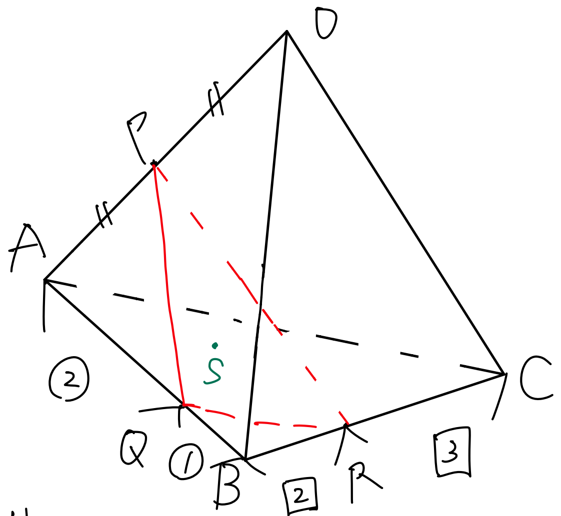
(3) $\overrightarrow{PR}$を$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ $\overrightarrow{OC}$で表す.

上図より, $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}$ …①, $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{BR}$ …②

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}$ であるため

①,②より, $\overrightarrow{PR} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC}$ である。

◎図をかくことでイメージしやすくなり、問題にとっかかりやすくなります!!



(4)

平面PQR上にSがあるときを考える

$\overrightarrow{OS}$は$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$で表したとき、それぞれの係数を足し合わせると必ず1となる。

そのため、

$\overrightarrow{OS} = (1-m-n)\overrightarrow{OP} + m\overrightarrow{OQ} + n\overrightarrow{OR}$ とおけ、$(m.n \in R)$

$\overrightarrow{OP}$、$\overrightarrow{OQ}$、$\overrightarrow{OR}$をそれぞれ、$\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$、$\overrightarrow{OC}$になおすと、

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1-m-n}{2}\overrightarrow{OA} + m\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right) + n\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{OB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OC}\right)$$

$$= \frac{3+m-3n}{6}\overrightarrow{OA} + \frac{5m+9n}{15}\overrightarrow{OB} + \frac{2n}{5}\overrightarrow{OC}$$

SはOC上のときを言い換えると、$\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$の係数は0!

よって $\frac{3+m-3n}{6} = 0$, $\frac{5m+9n}{15} = 0$

$m = -\frac{9}{8}$、$n = \frac{5}{8}$　よって $\overrightarrow{OS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$

[II]

次の □ をうめよ．答えは解答用紙の該当欄に記入せよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ が $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{12}n(n+7)$ を満たすとき，一般項は $a_n = \boxed{(1)}$ である．

また，$\sum_{k=1}^{2025} \cos(\pi a_n)$ の値は $\boxed{(2)}$ である．

---

(1) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{12}n(n+7)$ のときの a_n を求める

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \cancel{a_1}+\cancel{a_2}+\cdots+\cancel{a_{n-1}}+a_n$$

$$-\Big)\ \sum_{k=1}^{n-1} a_k = \cancel{a_1}+\cancel{a_2}+\cdots+\cancel{a_{n-1}}$$

@ポイント

$$\boxed{\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k = a_n}$$

$\sum_{k=1}^{n-1} a_k = \frac{1}{12}(n-1)(n+6)$ より

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

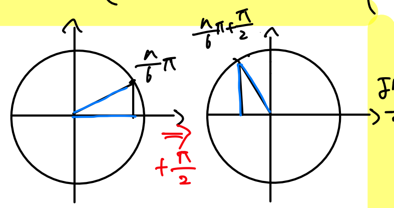
$$= \frac{1}{12}n(n+7) - \frac{1}{12}(n-1)(n+6)$$

$$= \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}$$

$n=1$ のとき，$\sum_{k=1}^{1} a_1 = \frac{1}{12}\cdot 1\cdot 8 = \frac{2}{3}$ より成立

$$\therefore a_n = \frac{1}{6}n + \frac{1}{2}$$

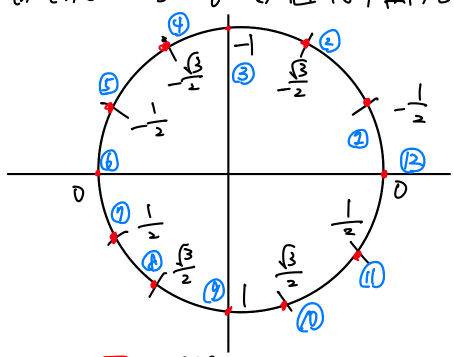
つづいて $\cos\pi a_n = \cos\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{2}\right)$



より $\Rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{6}n+\frac{\pi}{2}\right)$

$$= -\sin\frac{\pi}{6}n$$

・のそれぞれの $-\sin\frac{\pi}{6}$ の数値は下図のとおりである。



これらは n が $\boxed{12}$ の周期でくり返す。またその和は 0 である

これより $\sum_{n=1}^{2025}\cos\pi(a_n)$ ∵ $(2025 \div 12 = 168 \cdots 9)$

$$= 168\sum_{n=1}^{\boxed{12}}\cos\pi(a_n) + \sum_{n=1}^{9}\cos(\pi a_n)$$

つまり ①〜⑨ の和より

①+②+③+④+⑤+⑥+⑦+⑧+⑨

$$= -\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

(iii) 放物線の問題 $C : y = x^2 + 5x + 4$ が直線 $\ell_1 : y = 3x + k + 1$ と異なる 2 点で交わり，直線 $\ell_2 : y = 3x + k$ とも異なる 2 点で交わるとき，k の値の範囲は $\boxed{(5)}$ である．
この範囲の k に対して C と ℓ_1 の 2 つの交点と，C と ℓ_2 の 2 つの交点を頂点とする四角形の面積が 2 となる k の値は $\boxed{(6)}$ である．

---

(5) C と ℓ_2 を連立する.

$$x^2+5x+4 = 3x+k$$

i) $x^2+2x+4-k = 0$ ---①

① の x について の判別式を D_1 とする.

$D_1>0$ のとき 異なる2点で交わる。

よって $D/4 = 1-(4-k) > 0$

$\therefore k > 3$

ii)
同じように ℓ_1 も

$$x^2+5x+4 = 3x+k+1$$

$x^2+2x+3-k = 0$ ---- ②

② の x について判別式を D_2 とすると

$D_2>0$ のとき 異なる2点で交わるので

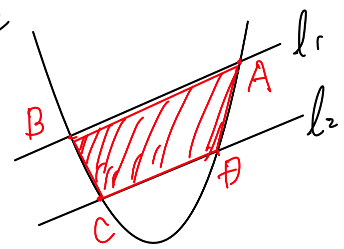
$1-(3-k) > 0$ $\quad\therefore k>2$

※ ℓ_2 が異なる2点で交わるとき必ず ℓ_1 も異なる2点で交わる

よって i) ii) より $k>3$

そのため ii) は考えなくてもよい

このとき概形を表すと



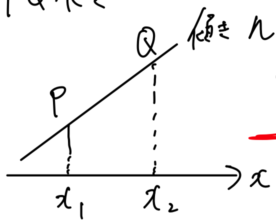
四角形ABCD は 台形 のため、
ABの長さと CDの長さと 高さ が求めたい

そのため、まず、①、②の共有点の x を求めたい。

① は $x = -1 \pm \sqrt{k-3}$

② は $x = -1 \pm \sqrt{k-2}$ である.

PQの長さ

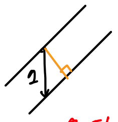


$PQ = (x_2 - x_1)\cdot\sqrt{n^2+1}$

よって ABの長さ $= \underbrace{2\sqrt{k-2}}_{2解の差} \cdot \sqrt{10}$

CDの長さ $= \underbrace{2\sqrt{k-3}}_{2解の差} \cdot \sqrt{10}$

また、高さ（$\ell_1 \ell_2$ の間の距離）d は



オレンジの傾きが $-\frac{1}{3}$ なことを考えると

$d = \frac{1}{\sqrt{10}}$

よって 四角形ABCD は

$$S = \frac{1}{2}\left(2\sqrt{10}\cdot\sqrt{k-3} + 2\sqrt{10}\sqrt{k-2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$= \sqrt{k-3} + \sqrt{k-2}$$

$S=2$ より

$$\sqrt{k-3}+\sqrt{k-2}=2 \quad \cdots ①$$

Ⓟ k の値を出すには、$\sqrt{\quad}$ の形を消す

$\Downarrow$

$$\frac{1}{\sqrt{k-3}+\sqrt{k-2}}=\frac{1}{2}$$

$\Downarrow$

$$\sqrt{k-2}-\sqrt{k-3}=\frac{1}{2} \quad \cdots ②$$

①+② より

$$2\sqrt{k-2}=\frac{5}{2}$$

$$k-2=\frac{5}{4} \quad (k>2)$$

$$\therefore k=\frac{57}{16}$$

(2) 10 個のデータ $-5, -2, 2, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15$ の平均値を m，中央値を M とすると，$(m, M) =$ $\boxed{(3)}$ である．この 10 個のデータに M と異なる 1 個のデータ a を加えてできる 11 個のデータの平均値を m'，中央値を M' とする．このとき，$\dfrac{m'-m}{M'-M} = 101$ となる a の値をすべて求めると $a =$ $\boxed{(4)}$ である．

(ii)

平均値＝データの合計÷データの個数

中央値＝データを値の小さい順に並べたときの真ん中
(偶数の場合、前半の最大値と後半の最小値の真ん中の値)

$$m = \frac{(-5)+(-2)+2+5+6+8+9+10+12+15}{10} = \frac{60}{10} = 6$$

また、小さい順に並べたとき5番目が6、6番目が8より
$M = 7$。

また $m' = \dfrac{60+a}{11}$ である。

M'については、aがどの値であるかによって変わるため場合分けが必要です。

$$\begin{cases} a \leqq 6 \text{ のとき} & M' = 6 \quad \cdots ① \\ 6 \leqq a \leqq 8 \text{ のとき} & M' = a \quad \cdots ② \\ a \geqq 8 \text{ のとき} & M' = 8 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

①のとき

$$\frac{m'-m}{M'-M} = \frac{\frac{60+a}{11} - 6}{6-7} = -\frac{a-6}{11} = 101 \qquad \therefore a = -1105$$

②のとき

$$\frac{m'-m}{M'-M} = \frac{\frac{60+a}{11} - 6}{a-7} = 101$$

$$\therefore a = \frac{7771}{1110}$$

③のとき

$$\frac{m'-m}{M'-M} = \frac{\frac{60+a}{11} - 6}{8-7} = 101$$

$$a = 1117$$

よって $a = -1105,\ \dfrac{7771}{1110},\ 1117$

[III] (記述問題)

a を正の定数とする．2 曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{\cos x}$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$，$C_2 : y = a \sin x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$ について，の問に答えよ．

(1) C_1 と C_2 の共有点がただ 1 つであるとき，その共有点における C_1 の接線 ℓ の方程式を求めよ．

(2) (i) のとき，曲線 C_1, C_2 および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ．

C_1: $y = \dfrac{1}{\cos x}$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

C_2: $y = a\sin x$ $\left(0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}\right)$

(1) 接点を求めるために C_1 と C_2 を連立する

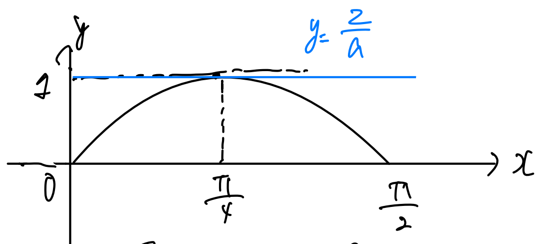
$$\frac{1}{\cos x} = a\sin x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$\therefore$ $a\sin x\cos x = 1$

$\therefore$ $\sin 2x = \dfrac{2}{a}$ ……①

$0 \leqq x < \dfrac{\pi}{2}$ において $y = \sin 2x$, $y = \dfrac{2}{a}$ が1点で接するときは、

グラフで視覚化すると

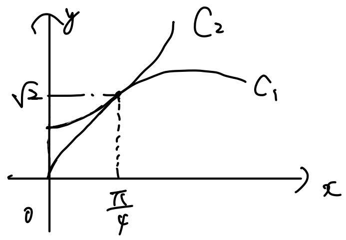


上図のときのみである

よってグラフより $a = 2$

よって①より $\sin 2x = 1$

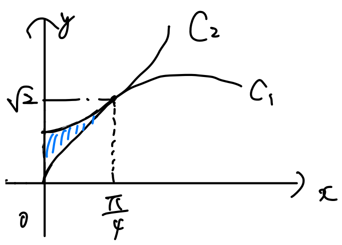
よって共有点のx座標は $x = \dfrac{\pi}{4}$ である。



C_1とC_2の概形は左のようになる。

C_2より $y' = 2\cos x$ となり、共通点の座標は $\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ であるから ℓの方程式は

$$y = \sqrt{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + \sqrt{2}$$



求める面積は斜線部なので、

求める面積をSとおくと

$$S = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos x} - 2\sin x\right) dx$$

ここで

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x}\,dx$$

ここの変形がポイント!!

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1-\sin^2 x}\,dx$$

ここで $\sin x = t$ とおくと

$$\therefore \cos x = \frac{dt}{dx}$$

x	$0 \to \frac{\pi}{4}$
t	$0 \to \frac{1}{\sqrt{2}}$

変換することに注意しよう!!

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2}\cdot\frac{dt}{dx}\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-t^2}\,dt$$

部分分数分解!!

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right)dt$$

$$=\frac{1}{2}\Big[-\log(1-t)+\log(1+t)\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\log\left(\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\right\}-0$$

$$=\frac{1}{2}\log\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2$$

$$=\log(1+\sqrt{2})$$

また

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\,dx = \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}+1$$

よって

$$S=\log(1+\sqrt{2})-2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$