ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

日本医科大学

一般選抜 前期 (2/1実施)

[I]

1 から 6 の目を 1 つのさいころがある。i を虚数単位とするとき、複素数平面上の点 z が $z_0=1$ から出発して、さいころを 1 回投げるごとに、次の規則に従って動く。

【規則】「4 以下の目が出たら現在の点に対応する複素数に $\sqrt{2}i$ を掛け、5 または 6 の目が出たら $1+i$ で割る。このようにして得られる複素数に対応する点を新たな点 z とする。」

n を 1 以上の整数とし、さいころを n 回投げたとき、4 以下の目が k $(k=0,1,2,\ldots,n)$ 回出る確率を $P_{n,k}$ とし、この場合の点 z に対応する複素数を $z_{n,k}$ と表すとき、以下の空欄に適する 1 以上の整数を求めよ。

■問 1　確率 $P_{n,k}$ は、二項係数 ${}_n\mathrm{C}_k$ を用いて

$$P_{n,k}=nC_k\cdot\frac{\boxed{\text{ア}}^k}{\boxed{\text{イ}}^n}$$

と表せる。また複素数 $z_{n,k}$ は

$$z_{n,k}=\boxed{\text{ウ}}^{\frac{\boxed{\text{エ}}k-n}{\boxed{\text{オ}}}}\left\{\cos\left(\frac{\boxed{\text{カ}}k-n}{\boxed{\text{キ}}}\pi\right)+i\sin\left(\frac{\boxed{\text{カ}}k-n}{\boxed{\text{キ}}}\pi\right)\right\}$$

となる。

■問 2　確率 $P_{2025,k}$ は $k=\boxed{\text{ク}}$ のとき、最大値をとる。

■問 3　複素数 $z_{2025,k}$ が純虚数となる k は $\boxed{\text{ケ}}$ 個ある。

[II]

O を原点とする座標空間において、四面体 OABC は OA $=$ OB $=$ AB $= 1$, AC $= 2$, OC $=$ BC $= \sqrt{3}$ を満たす。$0 < x < 1$ を満たす実数 x に対し、線分 OA を $x : (1-x)$ に内分する点を D とする。点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろす。また、三角形 ABC の内心を I とし、三角形 DHI の面積を S とする。$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくとき、以下の各問いに答えよ。

■問 1　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = \boxed{\text{ア}},\quad \vec{b}\cdot\vec{c} = \boxed{\text{イ}},\quad \vec{c}\cdot\vec{a} = \boxed{\text{ウ}}$$

■問 2　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \boxed{\text{エ}}\ \vec{a} + \boxed{\text{オ}}\ \vec{b} + \boxed{\text{カ}}\ \vec{c}$$

■問 3　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}} = \boxed{\text{キ}}\ \vec{a} + \boxed{\text{ク}}\ \vec{b} + \boxed{\text{ケ}}\ \vec{c}$$

■問 4　$S = \dfrac{\sqrt{2}}{24}$ のとき、x の値を求めよ。導出過程も記せ。

[III]

O を原点とする座標空間内において、点 P は xy 平面内の曲線 $x = 2y^2$ 上を動き、点 Q は zx 平面内の曲線 $x = 2z^2$ 上を動くとき、$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ によって定められる動点 R の集合を S とする。点 $\mathrm{A}(1, 3, 4)$ とするとき、以下の各問いの空欄に適する数値あるいは数式を求めよ。問 4 については導出過程も記せ。

■問 1　正の定数 k に対して、平面 $x = k$ と S の共通部分は、平面 $x = k$ 内の点 $(k, \boxed{\text{ア}}, \boxed{\text{イ}})$ を中心とし、半径 $\boxed{\text{ウ}}$ の円となる。

■問 2　点 A から x 軸に下した垂線を AH とするとき、線分 AH の長さは $\boxed{\text{エ}}$ となる。

■問 3　点 A を平面 $x = 1$ 内の点 $(1, 0, 0)$ を中心として x 軸の周りに回転して xy 平面上に移す。このような点のうちで y 座標が正となるものを B とすると、点 B の座標は $(\boxed{\text{オ}}, \boxed{\text{カ}}, \boxed{\text{キ}})$ となる。

■問 4　集合 S 上で点 X を動かすとき、$\left|\overrightarrow{\mathrm{AX}}\right|$ は X の座標が $(\boxed{\text{ク}}, \boxed{\text{ケ}}, \boxed{\text{コ}})$ のとき、最小値 $\boxed{\text{サ}}$ をとる。

[IV]

以下の各問いに答えよ。

■問 1　全ての実数 x に対して定義された関数 $a(x)$ に対して、関数 $b(x), c(x)$ を次で定める。

$$b(x)=\frac{1}{2}\{a(x)+a(-x)\},\quad c(x)=\frac{1}{2}\{a(x)-a(-x)\}$$

このとき、$b(x)$ は x の偶関数、$c(x)$ は x の奇関数、となることをそれぞれ示せ。

■問 2　全ての実数 x に対して定義された連続関数 $f(x)$ は次の条件 (i), (ii) を満たすものとする。

(i) $f(0)=2$.

(ii) $f(x+h)+\displaystyle\int_x^{x+h} g(t)f(t)dt = f(x)$ が全ての実数 x, h に対して成り立つ。ただし、$g(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}+\dfrac{\sin x}{3+\cos x}$ である。

このとき、以下の (1)〜(3) の各問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は微分可能であることを示し、$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を、$f(x)$ と $g(x)$ を用いて表せ。

(2) (ii) で与えた関数 $g(x)$ の原始関数 $G(x)$ で $G(0)=0$ を満たすものを求めよ。答えのみでよい。

(3) (2) の $G(x)$ に対して関数 $h(x)=e^{G(x)}f(x)$ で定めるとき、$h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を計算することにより $f(x)$ を求めよ。

■問 3　問 2 で求めた関数 $f(x)$ に対して、次の定積分の値を求めよ。

$$I=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

[I]

1 から 6 の目を 1 つのさいころがある。i を虚数単位とするとき、複素数平面上の点 z が $z_0 = 1$ から出発して、さいころを 1 回投げるごとに、次の規則に従って動く。

【規則】「4 以下の目が出たら現在の点に対応する複素数に $\sqrt{2}i$ を掛け、5 または 6 の目が出たら $1+i$ で割る。このようにして得られる複素数に対応する点を新たな点 z とする。」

n を 1 以上の整数とし、さいころを n 回投げたとき、4 以下の目が k $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$ 回出る確率を $P_{n,k}$ とし、この場合の点 z に対応する複素数を $z_{n,k}$ と表すとき、以下の空欄に適する 1 以上の整数を求めよ。

■問 1　確率 $P_{n,k}$ は、二項係数 ${}_nC_k$ を用いて

$$P_{n,k} = nC_k \cdot \frac{\boxed{\text{ア}}^k}{\boxed{\text{イ}}^n}$$

と表せる。また複素数 $z_{n,k}$ は

$$z_{n,k} = \boxed{\text{ウ}}^{\frac{\boxed{\text{エ}}k-n}{\boxed{\text{オ}}}}\left\{\cos\left(\frac{\boxed{\text{カ}}k-n}{\boxed{\text{キ}}}\pi\right) + i\sin\left(\frac{\boxed{\text{カ}}k-n}{\boxed{\text{キ}}}\pi\right)\right\}$$

となる。

■問 2　確率 $P_{2025,k}$ は $k = \boxed{\text{ク}}$ のとき、最大値をとる。

■問 3　複素数 $z_{2025,k}$ が純虚数となる k は $\boxed{\text{ケ}}$ 個ある。

問 1　$P_{n,k} = {}_nC_k \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k} = {}_nC_k \cdot \frac{2^k}{3^n}$

Point

大きさと偏角に分けて考えれば単純

(答えを出すプロセス)

$\sqrt{2}i$ を掛ける　$\longrightarrow$　$\begin{cases} \text{大きさ}\sqrt{2}\text{倍} \\ \frac{\pi}{2}\text{回転} \end{cases}$

$1+i = \sqrt{2}\,\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}$ で割る　$\longrightarrow$　$\begin{cases} \text{大きさ}\frac{1}{\sqrt{2}}\text{倍} \\ -\frac{\pi}{4}\text{回転} \end{cases}$

よって　$\begin{cases} z_{n,k}\text{の大きさ}: (\sqrt{2})^k \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-k} = 2^{\frac{2k-n}{2}} \\ z_{n,k}\text{の偏角}: k\cdot\frac{\pi}{2} + (n-k)\cdot\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{3k-n}{4}\pi \end{cases}$

問 2　Point

$P_{2025,k}$ の増減，すなわち，k を 1 増やしたときに $P_{2025,k}$ の値が増えるか減るのかを調べればよく，$P_{2025,k} > 0$ より

より $P_{2025,k+1} \gtreqless P_{2025,k} \iff \frac{P_{2025,k+1}}{P_{2025,k}} \gtreqless 1$ であることから，

そのためには $\frac{P_{2025,k+1}}{P_{2025,k}}$ と 1 との大小関係を調べればよい．

(答えを出すプロセス)

$$\frac{P_{2025,k+1}}{P_{2025,k}} = \frac{{}_{2025}C_{k+1}\cdot\frac{2^{k+1}}{3^{2025}}}{{}_{2025}C_k\cdot\frac{2^k}{3^{2025}}} = \frac{\frac{2025!}{(k+1)!(2025-k-1)!}}{\frac{2025!}{k!(2025-k)!}}\cdot 2 = \frac{2(2025-k)}{k+1}$$

$$\frac{P_{2025,k+1}}{P_{2025,k}} \gtreqless 1 \iff \frac{2(2025-k)}{k+1} \gtreqless 1$$

$$\iff 4050 - 2k \gtreqless k+1$$

$$\iff k \lesseqgtr 1349 + \frac{2}{3}$$

よって $P_{2025,0} < \cdots < P_{2025,1349} < P_{2025,1350} > P_{2025,1351} > \cdots P_{2025,2025}$

このあたりは慎重にチェックする！

$k = 1350$

(補足)

記述答案をちゃんと書くなら，

$$\frac{P_{2025,k+1}}{P_{2025,k}} = \cdots = \frac{2(2025-k)}{k+1} = -2 + \frac{4052}{k+1}$$

として $k \geqq 0$ で単調減少であることをコメントしておくと書きやすい．

問 3　Point

偏角 $\frac{3k-2025}{4}\pi$ が $\frac{\pi}{2} + m\pi$ (m: 整数) となるような k $(0 \leqq k \leqq 2025)$ の個数を数える問題であり，本質的には $\frac{3k-2025}{4} = \frac{1}{2} + m$ なる整数 m が存在するための k の条件を考える整数問題である．

(答えを出すプロセス)

k がみたすべき条件

$$\begin{cases} \cdot\ 0 \leqq k \leqq 2025 \\ \cdot\ \frac{3k-2025}{4}\pi = \frac{\pi}{2} + m\pi \quad \text{なる整数 } m \text{ が存在する} \end{cases}$$

$\iff 3k - 2025 = 2 + 4m$　なる整数 m が存在する

$\iff 3k = 4(m+506) + 3$　なる整数 m が存在する

$\iff 3(k-1) = 4m'$　なる整数 m' が存在する

3, 4 は互いに素 $\rightarrow$ $k - 1 = 4\ell$　$\therefore k = 4\ell + 1$
(ℓ: 整数)

$0 \leqq k \leqq 2025$ より ℓ は $0, 1, \ldots, 506$ の 507 通り

よって条件をみたす k は 507 個

(補足)

ほぼ同じことだが，合同式の性質を用いて

$3k = 4m' + 3$ から　$3k \equiv 3 \pmod 4$

3, 4 は互いに素ゆえ　$k \equiv 1$

$\longrightarrow k = 1, 5, \ldots, 2025$

と計算することもできる．

[II]
O を原点とする座標空間において、四面体 OABC は OA $=$ OB $=$ AB $=1$, AC $=2$, OC $=$ BC $=\sqrt{3}$ を満たす。$0<x<1$ を満たす実数 x に対し、線分 OA を $x:(1-x)$ に内分する点を D とする。点 O から平面 ABC に垂線 OH を下ろす。また、三角形 ABC の内心を I とし、三角形 DHI の面積を S とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}, \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくとき、以下の各問いに答えよ。

■問 1　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$\vec{a}\cdot\vec{b}=$ [ア], $\vec{b}\cdot\vec{c}=$ [イ], $\vec{c}\cdot\vec{a}=$ [ウ]

■問 2　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=$ [エ] $\vec{a}+$ [オ] $\vec{b}+$ [カ] $\vec{c}$

■問 3　空欄に適する数を求めよ。答えのみでよい。

$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=$ [キ] $\vec{a}+$ [ク] $\vec{b}+$ [ケ] $\vec{c}$

■問 4　$S=\dfrac{\sqrt{2}}{24}$ のとき、x の値を求めよ。導出過程も記せ。

問1　(答えを出すプロセス)

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$\cos\angle\mathrm{BOC}=\frac{1+3-3}{2\cdot1\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{2\sqrt{3}}\ \text{より}\ \vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

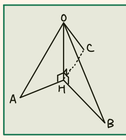
$$\angle\mathrm{COA}=90^\circ\ \text{より}\ \vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

(補足)

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}(|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2-|\vec{b}-\vec{c}|^2)=\frac{1}{2}(1^2+(\sqrt{3})^2-(\sqrt{3})^2)=\frac{1}{2}$$

などと計算することもできる.

問2　Point　対称性を崩さず計算するには…?



$\angle\mathrm{OHA}=\angle\mathrm{OHB}=\angle\mathrm{OHC}=90^\circ$ より, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ が定める直線に正射影したベクトルは一致するので,

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=c\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}$$

が成り立つ.

このことを利用して, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ $(s+t+u=1)$ とおいて計算すると, 簡潔に求められる.

(答えを出すプロセス)

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ とおく.

点Hは点A,B,Cを含む平面上にあるので　$s+t+u=1$　…①

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}+u\vec{c}\cdot\vec{a}=s+\frac{1}{2}t$$
$$\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2+u\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}s+t+\frac{1}{2}u$$
$$\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{c}\cdot\vec{a}+t\vec{b}\cdot\vec{c}+u|\vec{c}|^2=\frac{1}{2}t+3u$$

$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より　$s-t-u=0$　…②

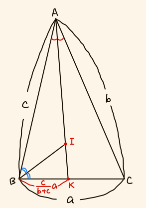
①, ② より　$s=\dfrac{1}{2}$

$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{c}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ より　$s=3u$　$\therefore\ u=\dfrac{1}{6}$

② より　$t=s-u=\dfrac{1}{3}$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$

問3　Point　内心は二等分線の交点であることを利用して $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ を求められる



直線AKは∠BACの二等分線ゆえ BK:CK = AB:AC

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AK}}=\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

直線BIは∠ABCの二等分線ゆえ AI:KI = BA:BK

$$\therefore\ \overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{c}{c+\frac{c}{b+c}a}\overrightarrow{\mathrm{AK}}$$
$$=\frac{b+c}{a+b+c}\left(\frac{b}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{c}{b+c}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$
$$=\boxed{\frac{b\overrightarrow{\mathrm{AB}}+c\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{a+b+c}}$$
$$=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}-(b+c)\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{a+b+c}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\boxed{\dfrac{a\overrightarrow{\mathrm{OA}}+b\overrightarrow{\mathrm{OB}}+c\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{a+b+c}}$

(答えを出すプロセス)

$$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\frac{\mathrm{BC}\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\mathrm{CA}\,\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\mathrm{AB}\,\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\mathrm{BC}+\mathrm{CA}+\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{3}\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}}{\sqrt{3}+2+1}$$
$$=\frac{3-\sqrt{3}}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}(\sqrt{3}\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c})$$
$$=\frac{\sqrt{3}-1}{2}\vec{a}+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\vec{b}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\vec{c}$$

問4　Point

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(\frac{1}{2}-x\right)\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{DI}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}-x\right)\vec{a}+\frac{3-\sqrt{3}}{3}\vec{b}+\frac{3-\sqrt{3}}{6}\vec{c}$$

として, $S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{DH}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{DI}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DI}})^2}$ を計算するといった流れで計算するのはさすがにかなり大変そうなので, 何か図形的な特徴はないかと考える.

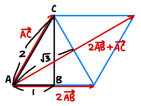
そこで, 問2, 問3で求めた値をよく見ると, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ の $\vec{b}, \vec{c}$ の係数の比がともに 2:1 であることから, $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ であることが分かる.

よって点Iは直線AH上にあると分かるので, 直角三角形OAHを含む面で考えていけばよい.

(解答)

$$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{6}(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\overrightarrow{\mathrm{OI}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{3-\sqrt{3}}{6}(2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

であることから, 点Iは直線AH上にあるので, 三角形DHIは三角形OAHと同一平面上にある.

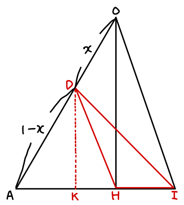


左図のように考えて $|2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=2\sqrt{3}$ と分かるので,

$$\mathrm{AH}=\frac{1}{6}|2\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって $\mathrm{AI}=\dfrac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AH}}\cdot\mathrm{AH}=(3-\sqrt{3})\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}-1$

であり, $\mathrm{HI}=\sqrt{3}-1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}-3}{3}$



また, 三平方の定理から　$\mathrm{OH}=\sqrt{1^2-\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

点Dから直線AIに下ろした垂線の足をKとすると

△ADK∽△AOH より　DK : OH $=(1-x):1$

$$\therefore\ \mathrm{DK}=(1-x)\mathrm{OH}=(1-x)\sqrt{\frac{2}{3}}$$

以上より

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{HI}\cdot\mathrm{DK}=\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})(1-x)}{6}$$

である. $S=\dfrac{\sqrt{2}}{24}$ のとき

$$\frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})(1-x)}{6}=\frac{\sqrt{2}}{24}$$
$$\therefore\ 1-x=\frac{1}{4(2-\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{4}$$
$$\therefore\ x=1-\frac{2+\sqrt{3}}{4}=\frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

[III]

O を原点とする座標空間内において、点 P は xy 平面内の曲線 $x = 2y^2$ 上を動き、点 Q は zx 平面内の曲線 $x = 2z^2$ 上を動くとき、$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ によって定められる動点 R の集合を S とする。点 A$(1, 3, 4)$ とするとき、以下の各問いの空欄に適する数値あるいは数式を求めよ。問 4 については導出過程も記せ。

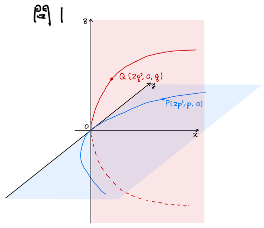
■問 1　正の定数 k に対して、平面 $x = k$ と S の共通部分は、平面 $x = k$ 内の点 $(k,$ ア $,$ イ $)$ を中心とし、半径 ウ の円となる。

■問 2　点 A から x 軸に下した垂線を AH とするとき、線分 AH の長さは エ となる。

■問 3　点 A を平面 $x = 1$ 内の点 $(1, 0, 0)$ を中心として x 軸の周りに回転して xy 平面上に移す。このような点のうちで y 座標が正となるものを B とすると、点 B の座標は (オ , カ , キ) となる。

■問 4　集合 S 上で点 X を動かすとき、$|\overrightarrow{AX}|$ は X の座標が (ク , ケ , コ) のとき、最小値 サ をとる。

問1

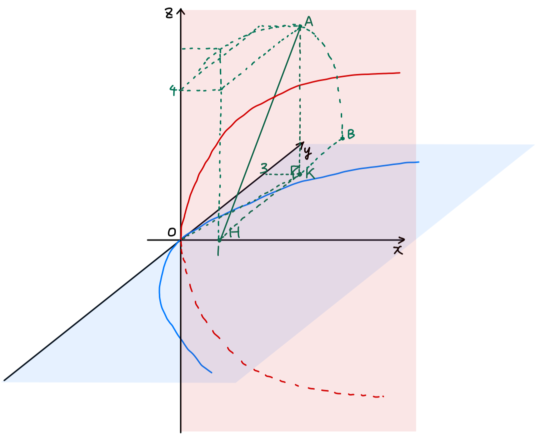


(答えを出すプロセス)

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 2(p^2+q^2) \\ p \\ q \end{pmatrix}$$

$x = k$ のとき $p^2 + q^2 = \frac{k}{2}$

中心 $(k, 0, 0)$，半径 $\sqrt{\frac{k}{2}}$



問2　(答えを出すプロセス)

H(1, 0, 0) だから 三平方の定理より

$$AH = \sqrt{HK^2 + AK^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

問3　(答えを出すプロセス)

BH = 5 で B の x 座標，z 座標はそれぞれ

1, 0 だから，B(1, 5, 0)

問4

Point
集合 S は x 軸対称なので，点 A が点 B に移るように全体を x 軸のまわりに回転させて考えてよい．

(解答)

問1より，任意の正の実数 k に対して，$x = k$ における S の断面は x 軸を中心とする円周になるので，集合 S は x 軸対称である．

よって，X を x 軸のまわりに $-\angle AHB$ だけ回転させた点を X' とおくと，$|\overrightarrow{AX}|$ の最小値と $|\overrightarrow{BX'}|$ の最小値は一致する．

まず，X' の x 座標を k (k は正の実数) と固定して考えると，問1より，

$$X'\begin{pmatrix} k \\ \sqrt{\frac{k}{2}}\cos\theta \\ \sqrt{\frac{k}{2}}\sin\theta \end{pmatrix} \quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$$ と表せる．

このとき，

$$|\overrightarrow{BX'}|^2 = (k-1)^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{2}}\cos\theta - 5\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{2}}\sin\theta\right)^2$$
$$= (k-1)^2 + \frac{k^2}{2} + 25 - 10\sqrt{\frac{k}{2}}\cos\theta$$

であり，これは $\cos\theta = 1$ すなわち $\theta = 0$ のとき最小値

$$|\overrightarrow{BX'}|^2 = (k-1)^2 + \left(\sqrt{\frac{k}{2}} - 5\right)^2$$

をとる．

次に，k を動かして考える．$t = \sqrt{\frac{k}{2}}$ とおくと，$t \geqq 0$ であり，

$$|\overrightarrow{BX'}|^2 = (2t^2-1)^2 + (t-5)^2 = 4t^4 - 3t^2 - 10t + 26$$

である．これを $f(t)$ とおくと，

$$f'(t) = 16t^3 - 6t - 10 = 2(t-1)(8t^2+8t+5)$$

で，$8t^2 + 8t + 5 = 8\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + 3 > 0$ であることに注意して $f(t)$ の増減は右のようだと分かる．

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		↘		↗

よって $f(t)$ は $t = 1$ のとき最小値 17 をとる．

$|\overrightarrow{BX'}| \geqq 0$ より，このとき $|\overrightarrow{BX'}|$ も最小値 $\sqrt{17}$ をとる．

このとき $k = 2$ であり，$X'\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ である．

X は X' を x 軸のまわりに $\angle AHB$ だけ回転させた点だから，

$X\begin{pmatrix} 2 \\ \frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ で $|\overrightarrow{AX}|$ はこのとき最小値 $\sqrt{17}$ をとる．

[IV]

以下の各問いに答えよ。

■問 1　全ての実数 x に対して定義された関数 $a(x)$ に対して、関数 $b(x), c(x)$ を次で定める。

$$b(x) = \frac{1}{2}\{a(x) + a(-x)\}, \quad c(x) = \frac{1}{2}\{a(x) - a(-x)\}$$

このとき、$b(x)$ は x の偶関数、$c(x)$ は x の奇関数、となることをそれぞれ示せ。

■問 2　全ての実数 x に対して定義された連続関数 $f(x)$ は次の条件 (i), (ii) を満たすものとする。

(i) $f(0) = 2$.

(ii) $f(x+h) + \int_x^{x+h} g(t)f(t)dt = f(x)$ が全ての実数 x, h に対して成り立つ。ただし、$g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} + \frac{\sin x}{3+\cos x}$ である。

このとき、以下の (1)〜(3) の各問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は微分可能であることを示し、$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を、$f(x)$ と $g(x)$ を用いて表せ。

(2) (ii) で与えた関数 $g(x)$ の原始関数 $G(x)$ で $G(0) = 0$ を満たすものを求めよ。答えのみでよい。

(3) (2) の $G(x)$ に対して関数 $h(x) = e^{G(x)}f(x)$ で定めるとき、$h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を計算することにより $f(x)$ を求めよ。

■問 3　問 2 で求めた関数 $f(x)$ に対して、次の定積分の値を求めよ。

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

問1　Point

こういう論証では定義にあてはまることを丁寧に言う。

(定義) 偶関数・奇関数

(定義域内の)任意の実数 x に対して

$f(-x) = f(x)$, $f(-x) = -f(x)$

を満たす関数をそれぞれ偶関数, 奇関数と言う.

(解答)

任意の実数 x に対して

$$\begin{aligned} b(-x) &= \frac{1}{2}\{a(-x) + a(-(-x))\} \\ &= \frac{1}{2}\{a(x) + a(-x)\} \\ &= b(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c(-x) &= \frac{1}{2}\{a(-x) - a(-(-x))\} \\ &= \frac{1}{2}\{-a(x) + a(-x)\} \\ &= -b(x) \end{aligned}$$

となるので, $b(x)$, $c(x)$ はそれぞれ, x の偶関数, 奇関数である.

問2 (1)　Point

関係する教科書の定義を復習しておく.

(定義) 関数 $f(x)$ が区間 I で微分可能

関数 $f(x)$ が区間 I のすべての x の値で微分可能であるとき, 関数 $f(x)$ は区間 I で微分可能という.

(定義) 関数 $f(x)$ が $x=a$ で微分可能

関数 $f(x)$ について, 極限値 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ が存在するとき, 関数 $f(x)$ は $x=a$ で微分可能という.

よって本問では, 任意の実数 x に対して, 極限値 $\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ が存在することを言えばよい.

したがって, $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ を極限が分かる形にしていくことになるのだが, 条件(ii)より任意の x, h に対して

$$f(x+h) - f(x) = -\int_x^{x+h} g(t)f(t)\,dt$$

が成り立つことを利用する.

さらに, 関数 $F(x)$ が区間 $[x, x+h]$ で微分可能であるとき,

$$\int_x^{x+h} F'(t)\,dt = F(x+h) - F(x)$$

の関係が成り立つことを利用すれば, 極限がとれる形になる.

(解答)

条件 (ii) より, 任意の実数 x, h に対して

$$f(x+h) - f(x) = -\int_x^{x+h} g(t)f(t)\,dt$$

が成り立ち, $g(x)$, $f(x)$ は連続関数であることから $h(x) = g(x)f(x)$ の原始関数は存在し, その1つを $H(x)$ とおくと,

$$\int_x^{x+h} H'(t)\,dt = H(x+h) - H(x)$$

という関係が成り立つので, 任意の実数 x に対して

$$\begin{aligned} \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \lim_{h \to 0}\left\{-\frac{H(x+h)-H(x)}{h}\right\} \\ &= -H'(x) \\ &= -g(x)f(x) \end{aligned}$$

が成り立つ. よって関数 $f(x)$ は微分可能であり,

$$f'(x) = -g(x)f(x)$$

である.

[IV]

以下の各問いに答えよ。

■問 1　全ての実数 x に対して定義された関数 $a(x)$ に対して、関数 $b(x), c(x)$ を次で定める。

$$b(x)=\frac{1}{2}\{a(x)+a(-x)\},\quad c(x)=\frac{1}{2}\{a(x)-a(-x)\}$$

このとき、$b(x)$ は x の偶関数、$c(x)$ は x の奇関数、となることをそれぞれ示せ。

■問 2　全ての実数 x に対して定義された連続関数 $f(x)$ は次の条件 (i), (ii) を満たすものとする。

(i) $f(0)=2$.

(ii) $f(x+h)+\int_x^{x+h} g(t)f(t)dt = f(x)$ が全ての実数 x, h に対して成り立つ。ただし、$g(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}+\dfrac{\sin x}{3+\cos x}$ である。

このとき、以下の (1)〜(3) の各問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は微分可能であることを示し、$f(x)$ の導関数 $f'(x)$ を、$f(x)$ と $g(x)$ を用いて表せ。

(2) (ii) で与えた関数 $g(x)$ の原始関数 $G(x)$ で $G(0)=0$ を満たすものを求めよ。答えのみでよい。

(3) (2) の $G(x)$ に対して関数 $h(x)=e^{G(x)}f(x)$ で定めるとき、$h(x)$ の導関数 $h'(x)$ を計算することにより $f(x)$ を求めよ。

■問 3　問 2 で求めた関数 $f(x)$ に対して、次の定積分の値を求めよ。

$$I=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx$$

(2) (答えを出すプロセス)

$$\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{(1+e^x)'}{1+e^x},\quad \frac{\sin x}{3+\cos x}=\frac{-(3+\cos x)'}{3+\cos x}$$

→ $1+e^x>0$, $3+\cos x>0$ に注意して

$$G(x)=\log\frac{1+e^x}{3+\cos x}+C$$

$G(0)=0$ より

$$C=-\log\frac{1+e^0}{3+\cos 0}=-\log\frac{1}{2}=\log 2$$

(答)　$G(x)=\log\dfrac{2(1+e^x)}{3+\cos x}$

(解説)　$\displaystyle\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\log|f(x)|+C$　を利用した

(3) **Point**

$h(x)$ の導関数と初期条件が分かれば $h(x)$ が容易に分かることがあるので、まずは言われた通りに $h(x)$ の導関数を計算してみる。

(答えを出すプロセス)

任意の実数 x に対して $h(x)=e^{G(x)}f(x)$ と定めると、

$$h'(x)=G'(x)e^{G(x)}f(x)+e^{G(x)}f'(x)$$

で、(2) より $G'(x)=g(x)$, (1) より $f'(x)=-g(x)f(x)$ であることから

$$h'(x)=e^{G(x)}\{g(x)f(x)-g(x)f(x)\}=0$$

よって $h(x)$ は定数関数で、$h(0)=e^{G(0)}f(0)=e^0\cdot 2=2$ であることと合わせて、(任意の実数 x に対して) $h(x)=e^{G(x)}f(x)=2$ である。

(任意の実数 x に対して) $e^{G(x)}>0$ だから、

$$f(x)=\frac{2}{e^{G(x)}}=\frac{3+\cos x}{1+e^x}$$

である。

問3　**Point**

問1そのものは非常に簡単なため、おそらく誘導のはず。

また、積分区間が y 軸対称であることからも、偶関数、奇関数の性質の利用を考えたい。

そこで、問1の2つの関数を足すと

$$\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}+\frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\}=f(x)$$

となることを利用して、$f(x)$ を偶関数と奇関数に分解する。

(解答)

$$I=\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}+\frac{1}{2}\{f(x)-f(-x)\}\right)dx$$

であり、問1で示したことと偶関数・奇関数の性質から、

$$I=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\{f(x)+f(-x)\}dx$$

である。ここで、

$$f(x)+f(-x)=\frac{3+\cos x}{1+e^x}+\frac{3+\cos(-x)}{1+e^{-x}}$$

$$=\frac{3+\cos x}{1+e^x}+\frac{e^x(3+\cos x)}{e^x+1}=3+\cos x$$

であることから、

$$I=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(3+\cos x)dx=\left[3x+\sin x\right]_0^{\pi}=3\pi$$

である。