ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

東海大学
医学部（1日目）

2/2実施

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

次の空欄を埋めなさい．解答は分数の場合には既約分数の形で書きなさい．

1

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k(3k+3)} = \boxed{\text{ア}}$ である．

(2) 関数 $f(x) = \left(\dfrac{4}{2^x}\right)^x$ は，$x = \boxed{\text{イ}}$ のとき最大値 $\boxed{\text{ウ}}$ をとる．

(3) $(x+1)^{26}$ の展開式における x^2 の項の係数は $\boxed{\text{エ}}$ である．26^{26} を 625 で割ったときの余りは $\boxed{\text{オ}}$ である．

(4) さいころを 3 回投げ，出た目を順に x, y, z とする．このとき，$x \leqq y \leqq z$ となる場合は $\boxed{\text{カ}}$ 通りである．

(5) 実部が 1 であり，虚部が正である複素数 z において，z^3 の虚部 y がとりうる値は $y \leqq \boxed{\text{キ}}$ である．

(6) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$\pi < \beta < \dfrac{3}{2}\pi$，$\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 3$ のとき，$\cos(2\alpha + \beta) = \boxed{\text{ク}}$ である．

(7) $0 < a < 4$ とする．直線 $l : y = ax$ と放物線 $C : y = 4x - x^2$ の共有点のうち，x 座標が正である点を P とおく．この点 P の x 座標は a を用いて表すと $\boxed{\text{ケ}}$ である．また，C と l により囲まれた部分の面積と，l と x 軸と直線 $x = \boxed{\text{ケ}}$ により囲まれた部分の面積の比が $2 : 1$ になるのは，$a = \boxed{\text{コ}}$ のときである．

$\boxed{2}$

四面体 OPQR において

$$\mathrm{OP} = \mathrm{OQ} = \mathrm{PQ} = 2, \quad QR = 2\sqrt{3}, \quad OR = 4, \quad PR = 3\sqrt{2}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{p}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \vec{q}, \quad \overrightarrow{\mathrm{OR}} = \vec{r}$ とおく．

(1) $\vec{p} \cdot \vec{q} = \boxed{\text{ア}}, \quad \vec{q} \cdot \vec{r} = \boxed{\text{イ}}$ である．

(2) $\cos \angle \mathrm{POR} = \boxed{\text{ウ}}, \quad \vec{p} \cdot \vec{r} = \boxed{\text{エ}}$ である．

(3) 3 点 O, P, Q を通る平面を α とし，点 R から α へ下ろした垂線と α の交点を H とする．x, y を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = x\vec{p} + y\vec{q}$ とおく．$\vec{p} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RH}}$ を x, y を用いて表すと $\vec{p} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RH}} = \boxed{\text{オ}}x + 2y - 1$ であり，$\vec{q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RH}}$ を x, y を用いて表すと $\vec{q} \cdot \overrightarrow{\mathrm{RH}} = \boxed{\text{カ}}x + 4y - 4$ であるから，$x = \boxed{\text{キ}}$, $y = \boxed{\text{ク}}$ となる．

(4) 直線 PH と直線 OQ の交点を L とすると，$\mathrm{OL} : \mathrm{LQ} = \boxed{\text{ケ}} : 1$ である．

$\boxed{3}$

x, y 平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0, 0), \mathrm{A}(1, 0), \mathrm{B}(1, \sqrt{3})$ をとり，$\triangle \mathrm{AOB}$ を考える．

(1) $\angle \mathrm{AOB}$ を二等分する直線 l の方程式は $y = \boxed{\text{ア}}$ である．

(2) $\triangle \mathrm{AOB}$ に内接する円 C の半径は $\boxed{\text{イ}}$ であり，中心の x 座標は $\boxed{\text{ウ}}$ である．

(3) l と C の共有点であり，O との距離が小さい方の点を D とする．点 D の x 座標は $\boxed{\text{エ}}$ である．

(4) 辺 OA，OB と C に接する円 C' の半径は $\boxed{\text{オ}}$ であり，中心の x 座標は $\boxed{\text{カ}}$ である．

(5) OA と C, C' で囲まれた部分の面積は，C' で囲まれた部分の面積の $\left(\boxed{\text{キ}} \dfrac{\sqrt{3}}{\pi} - \boxed{\text{ク}} \right)$ 倍である．ただし $\boxed{\text{キ}}$, $\boxed{\text{ク}}$ には有理数が入るものとする．

$\boxed{1}$

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k(3k+3)} = \boxed{ア}$ である．

(2) 関数 $f(x) = \left(\dfrac{4}{2^x}\right)^x$ は，$x = \boxed{イ}$ のとき最大値 $\boxed{ウ}$ をとる．

(3) $(x+1)^{26}$ の展開式における x^2 の項の係数は $\boxed{エ}$ である．26^26 を 625 で割ったときの余りは $\boxed{オ}$ である．

(4) さいころを 3 回投げ，出た目を順に x, y, z とする．このとき，$x \leqq y \leqq z$ となる場合は $\boxed{カ}$ 通りである．

(5) 実部が 1 であり，虚部が正である複素数 z において，z^3 の虚部 y がとりうる値は $y \leqq \boxed{キ}$ である．

(6) $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$，$\pi < \beta < \dfrac{3}{2}\pi$，$\tan\alpha = 2$，$\tan\beta = 3$ のとき，$\cos(2\alpha+\beta) = \boxed{ク}$ である．

(7) $0 < a < 4$ とする．直線 $l : y = ax$ と放物線 $C : y = 4x - x^2$ の共有点のうち，x 座標が正である点を P とおく．この点 P の x 座標は a を用いて表すと $\boxed{ケ}$ である．また，C と l により囲まれた部分の面積と，l と x 軸と直線 $x = \boxed{ケ}$ により囲まれた部分の面積の比が $2:1$ になるのは，$a = \boxed{コ}$ のときである．

$\boxed{1}$

9でくくる．　部分分数分解の利用！

(1) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3k(3k+3)} = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{9}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{9}\left\{\left(1-\cancel{\frac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}\right)+\cdots+\left(\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$
$$= \frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n}{9(n+1)}$$

(2) $f(x) = \left(\dfrac{4}{2^x}\right)^x = (2^{2-x})^x = 2^{x(2-x)}$　ここで $x(2-x)$ は $x=1$ で最大値 1 をとるので，$2^{x(1-x)} \leqq 2$ であり，

$(a^b)^c = a^{bc}$

$f(x)_{max} = f(1) = 2$

(3) 結局，26個のxのうち，x を 2つえらぶ場合の数が係数となる．

よって x^2 の係数は ${}_{26}C_2 = \dfrac{26\cdot 25}{2} = 13\cdot 25 = 325$

$26 = 25 + 1$ を利用する．

$25^2 = 625$ の倍数

また，
$$26^{26} = (25+1)^{26} = {}_{26}C_0 + {}_{26}C_1\cdot 25 + {}_{26}C_2\cdot 25^2 + \cdots {}_{26}C_{26}\cdot 26^{26}$$
$$= 1 + 26\times 25 + (625\text{の倍数})$$
$$= 1 + (25+1)\times 25 + (625\text{の倍数})$$
$$= 1 + 25 + (625\text{の倍数})$$
より，余りは 26

(4) 結局 1～6まで重複を許して数を3つえらぶ組合せに等しい．

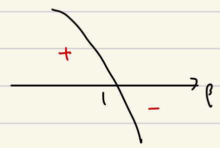
ので 棒2つ ○6つを並べる場合の数を考えて，${}_8C_2 = \dfrac{8\cdot 7}{2} = 28$

(5) $z = 1 + \beta i$ とすると $(\beta > 0)$　$z^3 = (1+\beta i)^3 = 1 - 3\beta^2 + 3\beta i - \beta^3 i$
$$= 1 - 3\beta^2 + (3\beta - \beta^3)i$$

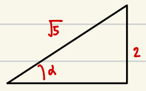
より，$\beta > 0$ における $3\beta - \beta^3$ の Max を考える．

$(3\beta - \beta^3)' = 3 - 3\beta^2 = 3(1-\beta^2)$ より，右図より，$\beta = 1$ で Max をとるので

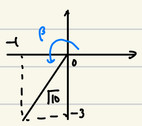
虚部 y がとりうる値は，$y \leqq (3\beta - \beta^3)|_{\beta=1} = 2$



(6) まず，$0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ より図のようになり，$\sin\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$，$\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

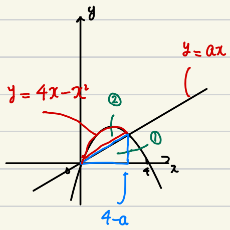


$\pi < \beta < \dfrac{3}{2}\pi$ より　$\sin\beta = -\dfrac{3}{\sqrt{10}}$　$\cos\beta = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ であるので，



$$\cos(2\alpha+\beta) = \cos 2\alpha\cos\beta - \sin 2\alpha\sin\beta$$
$$= (2\cos^2\alpha - 1)\cos\beta - 2\sin\alpha\cos\alpha\sin\beta$$
$$= \left(\frac{2}{5}-1\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) - 2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$$
$$= \frac{3}{5\sqrt{10}} + \frac{12}{5\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

(7)



$ax = 4x - x^2$ をとく．$x \neq 0$ より

$a = 4 - x$　∴ $x = 4 - a$

条件より

$\dfrac{1}{2}a(4-a)^2 : \dfrac{1}{6}(4-a)^3 = 1 : 2$

∴ $a = \dfrac{1}{6}(4-a)$　∴ $a = \dfrac{4}{7}$

$\boxed{2}$

四面体 OPQR において

$$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}=\mathrm{PQ}=2,\quad QR=2\sqrt{3},\quad OR=4,\quad PR=3\sqrt{2}$$

であり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{r}$ とおく．

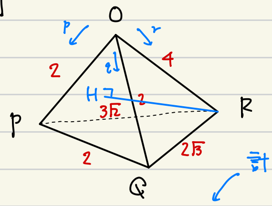
(1) $\vec{p}\cdot\vec{q}=\boxed{ア}$, $\vec{q}\cdot\vec{r}=\boxed{イ}$ である．

(2) $\cos\angle\mathrm{POR}=\boxed{ウ}$, $\vec{p}\cdot\vec{r}=\boxed{エ}$ である．

(3) 3 点 O, P, Q を通る平面を α とし，点 R から α へ下ろした垂線と α の交点を H とする．x, y を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=x\vec{p}+y\vec{q}$ とおく．$\vec{p}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RH}}$ を x, y を用いて表すと $\vec{p}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RH}}=\boxed{オ}x+2y-1$ であり，$\vec{q}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RH}}$ を x, y を用いて表すと $\vec{q}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RH}}=\boxed{カ}x+4y-4$ であるから，$x=\boxed{キ}$, $y=\boxed{ク}$ となる．

(4) 直線 PH と直線 OQ の交点を L とすると，OL : LQ = $\boxed{ケ}$: 1 である．

$\boxed{2}$

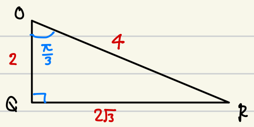


計算する前に図形的考察

(1) $\triangle OPQ$ は正三角形であるので $\angle POQ=\frac{\pi}{3}$ より、 $\vec{p}\cdot\vec{q}=OP\cdot OQ\cdot\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot2\cdot\frac{1}{2}=\underline{2}$

また $\triangle OQR$ についても下図より $30°$、$60°$、$90°$ の直角三角形より、

$\vec{q}\cdot\vec{r}=OQ\cdot OR\cdot\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot4\cdot\frac{1}{2}=\underline{4}$



(2) 余弦定理より、 $\cos\angle POR=\dfrac{2^2+4^2-(3\sqrt{2})^2}{2\cdot2\cdot4}=\underline{\dfrac{1}{8}}$

$\vec{p}\cdot\vec{r}=OP\cdot OR\cdot\cos\angle POR=2\cdot4\cdot\frac{1}{8}=\underline{1}$

(3) $\overrightarrow{OH}=x\vec{p}+y\vec{q}$ とする． $\overrightarrow{RH}=\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OR}=x\vec{p}+y\vec{q}-\vec{r}$

ここで $\alpha\perp RH$ より、 $\vec{p}\perp\overrightarrow{RH}$，$\vec{q}\perp\overrightarrow{RH}$ より、 $\vec{p}\cdot\overrightarrow{RH}=0$、$\vec{q}\cdot\overrightarrow{RH}=0$ である．

$\vec{p}\cdot\overrightarrow{RH}=\vec{p}(x\vec{p}+y\vec{q}-\vec{r})=x|\vec{p}|^2+y\,\vec{p}\cdot\vec{q}-\vec{p}\cdot\vec{r}$

$=\underline{4}x+2y-1=0$ —①

$\vec{q}\cdot\overrightarrow{RH}=\vec{q}(x\vec{p}+y\vec{q}-\vec{r})=x\,\vec{p}\cdot\vec{q}+y|\vec{q}|^2-x\vec{p}\vec{r}$

$=\underline{2}x+4y-4=0$ —②

①②をといて $(x,y)=\left(\underline{-\frac{1}{3}},\underline{\frac{7}{6}}\right)$

(4) Lはまず、OQ上にあるので、 $\overrightarrow{OL}=\alpha\vec{q}\ (\alpha\in\mathbb{R})$ —③

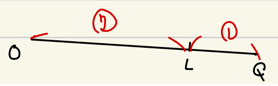
また Lは PH上にあるので、 $\overrightarrow{OL}=(1-\beta)\vec{p}+\beta\left(-\frac{1}{3}\vec{p}+\frac{7}{6}\vec{q}\right)$

$=\left(1-\frac{4}{3}\beta\right)\vec{p}+\frac{7}{6}\beta\vec{q}\ (\beta\in\mathbb{R})$ —④

$\vec{p}$, $\vec{q}$ が一次独立であることに注意して、③④の係数を比較して、

$$\begin{cases}1-\frac{4}{3}\beta=0\\ \frac{7}{6}\beta=\alpha\end{cases}\quad\therefore\ \alpha=\frac{7}{8}\quad\beta=\frac{3}{4}$$ より、下図より

$OL:LQ=\underline{7:1}$



$\boxed{3}$

x, y 平面上に 3 点 O$(0,0)$, A$(1,0)$, B$(1,\sqrt{3})$ をとり，△AOB を考える．

(1) ∠AOB を二等分する直線 l の方程式は $y =$ $\boxed{ア}$ である．

(2) △AOB に内接する円 C の半径は $\boxed{イ}$ であり，中心の x 座標は $\boxed{ウ}$ である．

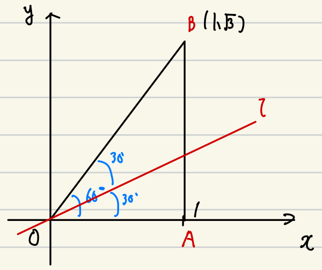
(3) l と C の共有点であり，O との距離が小さい方の点を D とする．点 D の x 座標は $\boxed{エ}$ である．

(4) 辺 OA，OB と C に接する円 C' の半径は $\boxed{オ}$ であり，中心の x 座標は $\boxed{カ}$ である．

(5) OA と C，C' で囲まれた部分の面積は，C' で囲まれた部分の面積の $\left(\boxed{キ}\dfrac{\sqrt{3}}{\pi} - \boxed{ク}\right)$ 倍である．ただし $\boxed{キ}$, $\boxed{ク}$ には有理数が入るものとする．

$\boxed{3}$

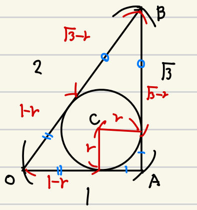
(1)



∠AOB = 60° より、二等分線は x 軸と 30° の角をなすので、

l: $y = \left(\tan\frac{\pi}{6}\right)x = \frac{\sqrt{3}}{3}x$

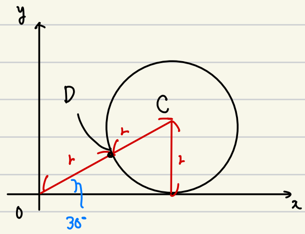
(2) 内接円の半径を r とすると　$2 = \sqrt{3} + 1 - 2r$　∴ $r = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$



また座標は $C(C_x, C_y)$ とすると

$C_x = 1 - r = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$　また $C_y = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

(3)

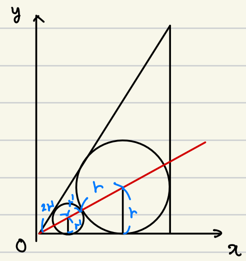


左図より OC 中点が D より

D の x 座標は

$\frac{1}{2}C_x = \frac{3-\sqrt{3}}{4}$

(4)



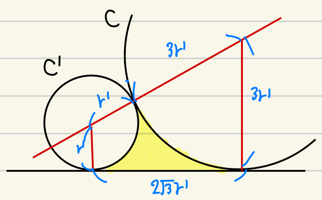
C′の半径を r' とする．

(3) と同様に左図を考えると，

$3r' = r$　∴ $r' = \frac{r}{3} = \frac{\sqrt{3}-1}{6}$

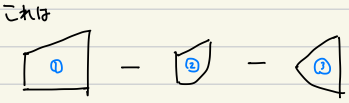
また中心の x 座標は $\sqrt{3}r'$ より，$x = \frac{3-\sqrt{3}}{6}$

(5)



黄色部分の面積が，OA, C, C′で囲まれた部分の面積

これは



で計算でき．

①：$\frac{1}{2} \times (r' + 3r') \times 2\sqrt{3}r' = 4\sqrt{3}(r')^2$

②：$\frac{1}{2}(r')^2 \cdot \frac{2}{3}\pi = \frac{\pi}{3}(r')^2$

③：$\frac{1}{2}(3r')^2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\pi(r')^2$

よりこの面積は、$4\sqrt{3}(r')^2 - \frac{11}{6}\pi(r')^2 = \left(\frac{4\sqrt{3}}{\pi} - \frac{11}{6}\right)\pi(r')^2$

C′で囲まれた面積