ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

順天堂大学
医学部

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

$\boxed{1}$

$\boxed{}$ に適する解答をマークせよ．

(1) 一般項が $a_n = 2^{n+3}3^{-n}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，$a_n < 1$ を満たす最小の n の値は $\boxed{\text{ア}}$ である．また，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{\text{イウ}}$ である．
一般項が $b_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ について，$b_n < 1$ を満たす最小の n の値は $\boxed{\text{エオ}}$ である．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(2) 四面体 OABC において，$\angle\mathrm{AOB} = \angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{AOC} = 60^\circ$, $\mathrm{OA} = 9$, $\mathrm{OB} = 3$, $\mathrm{OC} = 6$ である．点 P は辺 OA 上を，点 Q は辺 BC 上をそれぞれ独立に動く．このとき，線分 PQ を 2:1 に内分する点を R とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} \quad (0 \leqq s \leqq 1), \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

とし，辺 OB を 2:1 に内分する点を D とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{DR}} = s\vec{k} + t\vec{l}, \quad \vec{k} = \frac{\boxed{\text{ア}}}{\boxed{\text{イ}}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \quad \vec{l} = \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{オ}}}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

と表され，点 R はある平面上を動くことがわかる．この平面を H とすると，

$$|\vec{k}|^2 = \boxed{\text{キ}}, \quad |\vec{l}|^2 = \boxed{\text{クケ}}, \quad \vec{k}\cdot\vec{l} = \boxed{\text{コ}}$$

より，平面 H 上で点 R が描く図形の面積は $\boxed{\text{サ}}\sqrt{\boxed{\text{シス}}}$ である．

(3) 4 次方程式 $P(x) = x^4 - 54x^2 - 40x + 269 = 0$ を考える．
$x = y + b$ とおいたとき，

$$P(y+b) = y^4 - 4y^3 - 48y^2 + 64y + 256$$

となる定数 b の値は $b = \boxed{\text{アイ}}$ である．さらに $y = az$ とおいて，

$$P(az+b) = cz^4 - cz^3 + dz^2 + cz + c$$

となるように定数 a を選ぶと $a = \boxed{\text{ウ}}$ であり，このときの定数 c と d の値は $c = \boxed{\text{エオカ}}$, $d = \boxed{\text{キクケコ}}$ である．

方程式 $P(az+b) = 0$ において，$t = z - \dfrac{1}{z}$ とおくと $t = \dfrac{\boxed{\text{サ}} \pm \sqrt{\boxed{\text{シ}}}}{\boxed{\text{ス}}}$ である．

方程式 $P(x) = 0$ の実数解のうちで最大のものは $x = \sqrt{\boxed{\text{セ}}} + \sqrt{\boxed{\text{ソタ}} + \boxed{\text{チ}}\sqrt{\boxed{\text{ツ}}}}$ である．

(4) 次の $\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{エ}}$ に当てはまるものを，下の (A)～(D) から選べ.

(a) 実数 x について，$0 < |x+2| - |x-1| < 3$ は $-1 < x < 1$ であるための $\boxed{\text{ア}}$.

(b) 実数 x が有理数 a, b を用いて a^b と表せることは，x が有理数であるための $\boxed{\text{イ}}$.

(c) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することは, 数列 $\{a_n\}$ が $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすための $\boxed{\text{ウ}}$.

(d) m, n, l を整数とする．$m^2 + n^2 + l^2$ が奇数であることは，$m + n + l$ が奇数であるための $\boxed{\text{エ}}$.

(A) 必要十分条件である.

(B) 必要条件であるが，十分条件ではない.

(C) 十分条件であるが，必要条件ではない.

(D) 必要条件でも十分条件でもない.

$\boxed{2}$

$\boxed{}$ に適する解答をマークせよ。ただし、同じ記号の $\boxed{}$ がある場合は同一の値がはいる。

3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$ について、以下の (a), (b), (c) それぞれの場合における定数 a, b, c, d の値を求めよ。

(a) 3 次関数 $f(x)$ は以下の条件 (i), (ii) を満たす。

(i) $y = f(x)$ のグラフは直線 $y = 6x$ と 3 個の共有点 $(-2, -12)$, $(1, 6)$, $(4, 24)$ を持つ。
(ii) $f(x)$ の $x = -2$ における微分係数が -3 である。

このとき、条件 (i) より

$$f(x) - 6x = a\left(x + \boxed{\text{ア}}\right)\left(x - \boxed{\text{イ}}\right)\left(x - \boxed{\text{ウ}}\right)$$

となる。ただし、$\boxed{\text{イ}} < \boxed{\text{ウ}}$ である。さらに、条件 (ii) を考慮して

$$a = \frac{\boxed{\text{エオ}}}{\boxed{\text{カ}}},\quad b = \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}},\quad c = \boxed{\text{ケ}},\quad d = \boxed{\text{コサ}}$$

を得る。

(b) 3 次関数 $f(x)$ は以下の条件 (i), (ii) を満たす。

(i) $y = f(x)$ のグラフは直線 $y = 6x$ と点 $(1, 6)$ で接し、かつ共有点 $(4, 24)$ を持つ。
(ii) $y = f(x)$ のグラフは直線 $y = 6x - 12$ と接する。

このとき、

$$a = \boxed{\text{シ}},\quad b = \boxed{\text{スセソ}},\quad c = \boxed{\text{タチ}},\quad d = \boxed{\text{ツテト}}$$ である。

(c) 3 次関数 $f(x)$ は以下の条件 (i), (ii) を満たす。

(i) $y = f(x)$ のグラフは直線 $y = 6x$ と点 $(1, 6)$ で接し、他に共有点はない。
(ii) $f(x)$ は $x = -3$ で極値をとる。

このとき、

$$a = \frac{\boxed{\text{ナニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}},\quad b = \frac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}},\quad c = \frac{\boxed{\text{ハヒ}}}{\boxed{\text{フ}}},\quad d = \frac{\boxed{\text{ヘ}}}{\boxed{\text{ホ}}}$$ である。

3

0 以上の整数 n に対して

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+1} x \, dx$$

とする。

(1) I_0 を求めよ。

$$I_0 = \frac{1}{2}(\log 2)^2$$

(2) $n \geqq 1$ のとき

$$I_n = (-1)^n \left(I_0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m} \right)$$

が成り立つことを数学的帰納法によって示せ。

(3)

$$\log 2 = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m}$$

を示せ。ただし、$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において、$0 \leqq \tan x \leqq \dfrac{4}{\pi} x$ が成り立つことを用いてよい。

(1) 一般項が $a_n = 2^{n+3}3^{-n}$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ について，$a_n < 1$ を満たす最小の n の値は $\boxed{\text{ア}}$ である．また，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \boxed{\text{イウ}}$ である．
一般項が $b_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$ で与えられる数列 $\{b_n\}$ について，$b_n < 1$ を満たす最小の n の値は $\boxed{\text{エオ}}$ である．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする．

(1) $a_n < 1$ を満たす最小の n

$a_n = 2^{n+3} \cdot 3^{-n}$

$= 8 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n$

ここで a_n に対数をとると

$\log_{10} a_n = 3\log 2 + n(\log_{10} 2 - \log_{10} 3)$

$\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ より

$= 3 \times 0.3010 + n(0.3010 - 0.4771)$

$= 0.9030 - 0.1761n$

$a_n < 1 \cdots ①$

①に両辺対数をとると

$0.9030 - 0.1761n < 0$

⇓ 計算ミスをしないよう

$\Rightarrow \quad n > 5.4 \cdots$ 注意しよう！

よって最小の n は $\underline{6}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$ より

初項 $\frac{16}{3}$，公比 $\frac{2}{3}$ の無限等比級数より

$\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ より

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{\frac{16}{3}}{1-\frac{2}{3}} = \underline{16}$

$\frac{2}{3} < 1$ なので

$b_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$

$= 2^3\left(\frac{2}{3}\right)^1 \times 2^3\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \cdots \times 2^3\left(\frac{2}{3}\right)^n$

◎ ここで b_n に対数をとると

$\log_{10} b_n = 3n\log_{10}2 + \log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^1 + \cdots + \log_{10}\left(\frac{2}{3}\right)^n$

$= 3n\log_{10}2 + (1+2+\cdots+n)\log_{10}2$

$\quad - (1+2+\cdots+n)\log_{10}3$

$= 3n\log_{10}2 + \frac{1}{2}n(n+1)(\log_{10}2 - \log_{10}3)$

$3n\log_{10}2 + \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n\right)(\log_{10}2 - \log_{10}3)$

$= \frac{1}{2}(\log_{10}2 - \log_{10}3)n^2 + \left(\frac{7}{2}\log_{10}2 - \frac{1}{2}\log_{10}3\right)n$

$= -\frac{1}{2}n\{(\log_{10}3 - \log_{10}2)n - 7\log_{10}2 - \log_{10}3\}$

$= -\frac{1}{2}n\{0.1761n - 1.6299\}$

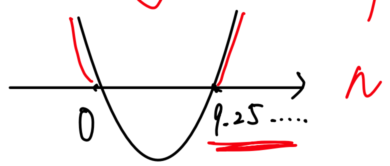
ここで $b_n < 1$ より

両辺に対数をとると

$\Rightarrow \log_{10} b_n < 0$

$\Rightarrow 0 < \frac{1}{2}n\{0.1761n - 1.6299\}$

$\Downarrow$ nの2次式より



よって $b_n < 1$ を満たす最小の n は 10。

(2) 四面体 OABC において，$\angle AOB = \angle BOC = \angle AOC = 60°$, $OA = 9$, $OB = 3$, $OC = 6$ である．点 P は辺 OA 上を，点 Q は辺 BC 上をそれぞれ独立に動く．このとき，線分 PQ を 2:1 に内分する点を R とする．

$$\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} \quad (0 \leqq s \leqq 1), \quad \overrightarrow{OQ} = (1-t)\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC} \quad (0 \leqq t \leqq 1)$$

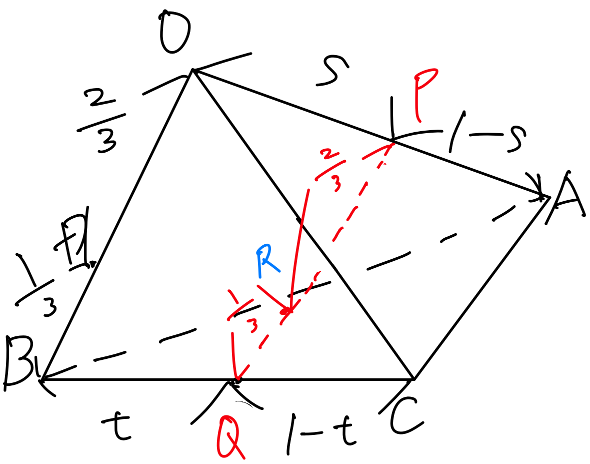
とし，辺 OB を 2:1 に内分する点を D とすると，

$$\overrightarrow{DR} = s\vec{k} + t\vec{l}, \quad \vec{k} = \frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\overrightarrow{OA}, \quad \vec{l} = \frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\overrightarrow{OC} - \frac{\boxed{カ}}{\boxed{オ}}\overrightarrow{OB}$$

と表され，点 R はある平面上を動くことがわかる．この平面を H とすると，

$$|\vec{k}|^2 = \boxed{キ}, \quad |\vec{l}|^2 = \boxed{クケ}, \quad \vec{k}\cdot\vec{l} = \boxed{コ}$$

より，平面 H 上で点 R が描く図形の面積は $\boxed{サ}\sqrt{\boxed{シス}}$ である．



問題文は上図のように表せる.

点Rは辺PQを2:1に内分した点であるため

$\vec{OR} = \frac{1}{3}\vec{OP} + \frac{2}{3}\vec{OQ}$

ここで, $\vec{OP} = s\vec{OA}$, $\vec{OQ} = (1-t)\vec{OB} + t\vec{OC}$

⇓丁寧に代入しましょう

よって $\vec{OR} = \frac{1}{3}s\vec{OA} + \frac{2}{3}(1-t)\vec{OB} + \frac{2}{3}t\vec{OC}$

また, $\vec{OD} = \frac{2}{3}\vec{OB}$ である (上図より)

よって $\vec{DR} = \vec{OR} - \vec{OD}$

$= \frac{1}{3}s\vec{OA} + t\left(\frac{2}{3}\vec{OC} - \frac{2}{3}\vec{OB}\right)$

つまり $\vec{k} = \frac{1}{3}\vec{OA}$, $\vec{l} = \frac{2}{3}\vec{OC} - \frac{2}{3}\vec{OB}$ //

問題文に従うと,

・$|\vec{k}|^2 = \frac{1}{9}|\vec{OA}|^2 = 9$ //

・$|\vec{l}|^2 = \left(\frac{2}{3}\vec{OC} - \frac{2}{3}\vec{OB}\right)^2$

↓ベクトル特有な展開に注意!!

$= \frac{4}{9}\left(|\vec{OB}|^2 - 2\vec{OB}\cdot\vec{OC} + |\vec{OC}|^2\right)$

$= \frac{4}{9}\left(9 - 2\cdot|\vec{OB}|\cdot|\vec{OC}|\cos\angle BOC + 36\right)$

$= \frac{4}{9}\cdot\left(9 - 2\cdot 3\cdot 6\cdot\frac{1}{2} + 36\right)$

$= \frac{4}{9}(9 - 18 + 36)$

$= 12$ //

$$\vec{k}\cdot\vec{l} = \frac{1}{3}\vec{OA}\left(\frac{2}{3}\vec{OC} - \frac{2}{3}\vec{OB}\right)$$
$$= \frac{2}{9}\left(\vec{OA}\cdot\vec{OC} - \vec{OA}\cdot\vec{OB}\right)$$

ここで

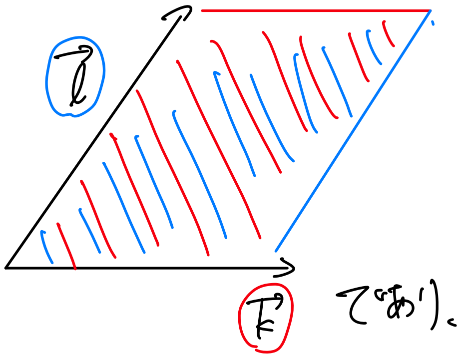
$$\vec{OA}\cdot\vec{OC} = |\vec{OA}|\cdot|\vec{OC}|\cdot\cos\angle AOC = 9\cdot 6\cdot\frac{1}{2} = 27$$
$$\vec{OA}\cdot\vec{OB} = |\vec{OA}|\cdot|\vec{OB}|\cdot\cos\angle AOB = 9\cdot 3\cdot\frac{1}{2} = \frac{27}{2}$$

※それぞれの内積を別で計算するとミスしにくいです.

よって

$$\vec{k}\cdot\vec{l} = \frac{2}{9}\left(27 - \frac{27}{2}\right) = 3$$

$0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1$ より Rが動く図形は



であり。

つまり $\vec{k}$ と $\vec{l}$ によってつくられる平行四辺形である。

$$▱ = \sqrt{|\vec{k}|^2|\vec{l}|^2 - (\vec{k}\cdot\vec{l})^2}$$
$$= \sqrt{9\cdot 12 - 3^2}$$
$$= 3\sqrt{11}$$

これは $\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$ の応用です

( の面積)

(3) 4 次方程式 $P(x) = x^4 - 54x^2 - 40x + 269 = 0$ を考える．
$x = y + b$ とおいたとき，

$$P(y+b) = y^4 - 4y^3 - 48y^2 + 64y + 256$$

となる定数 b の値は $b =$ $\boxed{アイ}$ である．さらに $y = az$ とおいて，

$$P(az+b) = cz^4 - cz^3 + dz^2 + cz + c$$

となるように定数 a を選ぶと $a =$ $\boxed{ウ}$ であり，このときの定数 c と d の値は $c =$ $\boxed{エオカ}$，$d =$ $\boxed{キクケコ}$ である．

方程式 $P(az+b) = 0$ において，$t = z - \dfrac{1}{z}$ とおくと $t = \dfrac{\boxed{サ} \pm \sqrt{\boxed{シ}}}{\boxed{ス}}$ である．

方程式 $P(x) = 0$ の実数解のうちで最大のものは $x = \sqrt{\boxed{セ}} + \sqrt{\boxed{ソタ} + \boxed{チ}\sqrt{\boxed{ツ}}}$ である．

$P(y+b) = (y+b)^4 - 54(y+b)^2 - 40(y+b) + 269$

$= y^4 - 4y^3 - 48y^2 + 64y + 256$ より

①,②の y の3次の係数を比較すると，

$_4C_1 \cdot b^1 \cdot y^3 = -4y^3$ で

$\Rightarrow b = -1$

同じように

$P(az+b) = (az-1)^4 - 54(az-1)^2 - 40(az-1) + 269$ ---③

$= cz^4 - cz^3 + dz^2 + cz + c$

③,④のその4次、3次、2次の項の係数をそれぞれ比較すると

$$\begin{cases} a^4 = c \\ _4C_1 \cdot a^3 \cdot (-1)^1 = -c \\ _4C_2 \cdot a^2 \cdot (-1)^2 - 54a^2 = d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^4 = c & \text{―⑤} \\ 4a^3 = c & \text{―⑥} \\ -48a^2 = d & \text{―⑦} \end{cases}$$

よって⑤,⑥より c を消去して

$a^3(a-4) = 0 \quad \therefore a = 0, 4$

ア) $a = 0$ のとき

$y = 0$ より $x = -1$ で $P(-1) = 0$ を満たさず不適

イ) $a = 4$ のとき

①,③より $c = 256$, $d = -768$

このとき③、④は一致するため

$a = 4$, $c = 256$, $d = -768$

$P(az+b)=0$

$\Rightarrow z^4-z^3-3z^2+z+1=0$

$z-\frac{1}{z}$ の形をつくるために....

$z=0$ はこの方程式を満たさないので z^2 で割ると

$z^2-z-3+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}=0$

$\Rightarrow \left(z-\frac{1}{z}\right)^2-\left(z-\frac{1}{z}\right)-1=0$

$t=z-\frac{1}{z}$ より

$t^2-t-1=0$

$t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ //

$z-\frac{1}{z}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow 2z^2-(1\pm\sqrt{5})z-2=0$

z の二次方程式をとくと

丁寧に計算しよう

$z=\frac{(1\pm\sqrt{5})+\sqrt{22\pm2\sqrt{5}}}{4}$, $\frac{(1\pm\sqrt{5})-\sqrt{22\pm2\sqrt{5}}}{4}$

よって

$x=4z-1$ より

$x=\pm\sqrt{5}+\sqrt{22\pm2\sqrt{5}}$, $\pm\sqrt{5}-\sqrt{22\pm2\sqrt{5}}$

よって求める実数解の max は

$x=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}}$ //

(4) 次の $\boxed{ア}$ ～ $\boxed{エ}$ に当てはまるものを，下の (A)～(D) から選べ．

(a) 実数 x について，$0 < |x+2| - |x-1| < 3$ は $-1 < x < 1$ であるための $\boxed{ア}$．

(b) 実数 x が有理数 a, b を用いて a^b と表せることは，x が有理数であるための $\boxed{イ}$．

(c) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束することは, 数列 $\{a_n\}$ が $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を満たすための $\boxed{ウ}$．

(d) m, n, l を整数とする．$m^2 + n^2 + l^2$ が奇数であることは，$m + n + l$ が奇数であるための $\boxed{エ}$．

(A) 必要十分条件である．

(B) 必要条件であるが，十分条件ではない．

(C) 十分条件であるが，必要条件ではない．

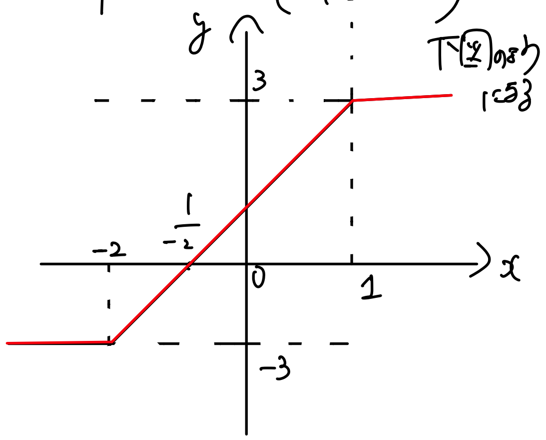
(D) 必要条件でも十分条件でもない．

(a) $0 < |x+2| - |x-1| < 3$ 左を$f(x)$と

場合分けして

$$f(x) = \begin{cases} -3 & (x \leqq -2) \\ 2x+1 & (-2 \leqq x \leqq 1) \\ 3 & (1 \leqq x) \end{cases}$$

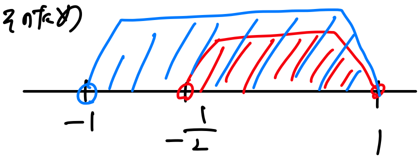
下図のようになる



よって左下図より

$0 < f(x) < 3$ の解は $\underline{-\frac{1}{2} < x < 1}$

そのため



であり、

$\underline{\text{(C) 十分条件ではあるが、必要条件でない。}}$ //

(b)「実数 x が、有理数 a, b を用いて $x = a^b$ と表せる」$\Rightarrow$ x は有理数 ——①

これは偽 反例 $a=2, b=\frac{1}{2}$ で $a^b = \sqrt{2}$ で無理数

① の逆は $a = x, \ b = 1$ としたとき

$x = a^b$ と表せられるため 真

故に

$\underline{\text{(B) 必要条件であるが十分条件でない}}$ //

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ が収束する $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

は、(証) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha$ とすると、

$a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \quad (n \geqq 2)$ より

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n} a_k - \sum_{k=1}^{n-1} a_k\right\} = \alpha - \alpha = 0$

よって 真

その逆は、

反例 $a_n = \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$ のとき、

$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \log\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0$ であるが、

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\log\left(\frac{k+1}{k}\right)$

$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1) - \log k\} = \lim_{n\to\infty}\log(n+1) = \infty$

で偽

よって
(c) は十分条件であるが、必要条件ではない

(d) m, n, l を整数とする。

「$m^2+n^2+l^2$ が奇数」$\Rightarrow$ $l+m+n$ が奇数

(証) $m^2+n^2+l^2$ が奇数のとき、

① m, n, l はすべて奇数、

② m, n, l のうち2つは偶数で1つは奇数 である。

この①②のとき、$m+n+l$ は奇数のため 真

その逆は、$m+n+l$ が奇数のとき

△1 m, n, l はすべて奇数 △2 m, n, l のうち2つは偶数で1つは奇数

この場合、$m^2+n^2+l^2$ は奇数 であるため 真

よって

(A) 必要十分条件。

3 次関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\,(a \neq 0)$ について、以下の (a), (b), (c) それぞれの場合における定数 a, b, c, d の値を求めよ。

(a) 3 次関数 $f(x)$ は以下の条件 (i), (ii) を満たす。

(i) $y = f(x)$ のグラフは直線 $y = 6x$ と 3 個の共有点 $(-2, -12)$, $(1, 6)$, $(4, 24)$ を持つ。
(ii) $f(x)$ の $x = -2$ における微分係数が -3 である。

このとき、条件 (i) より

$$f(x) - 6x = a\left(x + \boxed{ア}\right)\left(x - \boxed{イ}\right)\left(x - \boxed{ウ}\right)$$

となる。ただし、$\boxed{イ} < \boxed{ウ}$ である。さらに、条件 (ii) を考慮して

$$a = \frac{\boxed{エオ}}{\boxed{カ}}, \quad b = \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}, \quad c = \boxed{ケ}, \quad d = \boxed{コサ}$$

を得る。

---

(1) 条件 (i) より

$f(x) - 6x = a(x+2)(x-1)(x-4)$ である.

$\therefore f(x) = a(x^3 - 3x^2 - 6x + 8) + 6x$

$f'(x) = a(3x^2 - 6x - 6) + 6$

条件 (ii) より

条件に従い 丁寧に計算していこう

$f'(-2) = 18a + 6 = -3$

$\therefore a = -\frac{1}{2}$ であり

$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 9x - 4$ //

(2) 条件 (i) より (1)より同様に

$f(x) - 6x = a(x-1)^2(x-4)$ で

$f(x) = a(x^3 - 6x^2 + 9x - 4) + 6x$

$f'(x) = a(3x^2 - 12x + 9) + 6$

$f'(x) = 6$ より 丁寧に計算

$3(x-1)(x-3) = 0$ より

$x = 1, 3$

ここで $(3, -4a+18)$ を通る接線は、

$y = 6(x-3) + (-4a+18)$

$= 6x - 4a$ で

$y = 6x - 12$ より

$6x - 4a = 6x - 12$ で

$a = 3$

よって　$a=3$ を代入して

$$f(x) = 3(x-1)^2(x-4)+6x$$
$$= 3x^3-18x^2+33x-12$$ //

(c)

条件 (i) より　　同様に

$$f(x)-6x = a(x-1)^3$$ であり

$$f'(x) = 3a(x-1)^2+6$$

(ii) より $f'(-3)=0$ より

$$f'(-3) = 3a\cdot 16-6=0$$ より

$$a=-\frac{1}{8}$$ //

$$f(x) = -\frac{1}{8}(x-1)^3+6x$$
$$= -\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{8}x^2+\frac{45}{8}x+\frac{1}{8}$$ //

丁寧に計算していこう!!

3

0 以上の整数 n に対して

$$I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^{2n+1} x\, dx$$

とする。

(1) I_0 を求めよ。

---

(1) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n+1} x\, dx$ より

$I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x\, dx$

早くとくコツ！　この形をみたら $\left(\frac{-1}{\cos x}\right)'$ とわかろう！

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-(\cos x)'}{\cos x}\, dx$

$= \left[-\log|\cos x|\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= -\log\frac{1}{\sqrt{2}} - (-\log 1)$

$= \frac{1}{2}\log 2$ //

(2)

㋐ $n=1$ のとき

$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^3 x\, dx$

$\boxed{\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}}$ より、

$= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \tan x\, dx$

I_0

$= -I_0 + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot (\tan x)'\, dx$

$= -I_0 + \left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$

$= -I_0 + \frac{1}{2}\cdot\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^2$

$= -I_0 + \frac{1}{2}$ となり成立

① $n=k$ で成立しているとする.

$$I_k = (-1)^k\left(I_0 + \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{2m}\right)$$

である.

このとき、

$$I_{k+1} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \tan^{2k+1} x\, dx$$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

㋐の考え方と同様!!

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)\tan^{2k+1}x\,dx$$

I_k

$$= -I_k + \int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2k+1}x\,(\tan x)'\,dx$$

$$= -I_k + \left[\frac{1}{2k+2}\tan^{2k+2}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -I_k + \frac{1}{2k+2} - 0$$

$$= -I_k + \frac{1}{2(k+1)}$$

$$= -(-1)^k\left(I_0 + \sum_{m=1}^{k}\frac{(-1)^m}{2m}\right) + \frac{1}{2(k+1)}$$

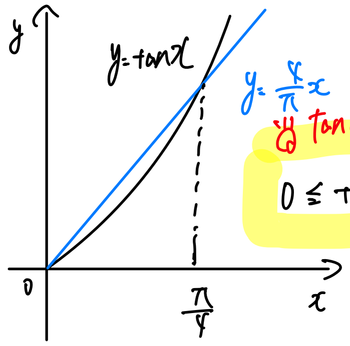
$m=k+1$ のとき $\frac{(-1)^m}{2m}$ なので

$$= (-1)^{k+1}\left(I_0 + \sum_{m=1}^{k+1}\frac{(-1)^m}{2m}\right)$$

であり $n=k+1$ でも成立

㋐,①より数学的帰納法より示せた.

(3) $0 \leqq x \leqq \frac{\pi}{4}$ において



tanの評価で重要!!

$$\boxed{0 \leqq \tan x \leqq \frac{4}{\pi}x}$$

より

$$0 \leqq I_n \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\pi}x\right)^{2n+1}dx$$

である.

ここで右辺について

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{4}{\pi}x\right)^{2n+1}dx$$

$$= \left[\frac{1}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\left(\frac{4}{\pi}x\right)^{2n+2}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2n+2}\cdot\frac{\pi}{4} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

である

はさみうちの原理より

$$\lim_{n\to\infty} I_n = 0$$

(2) より

$$\left|I_n\right| = \left|I_0 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{2m}\right|$$ であり、

$n \to \infty$ にすると

$$0 = \left|I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2m}\right|$$

$$\Rightarrow -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m} = -2I_0 = \log 2$$

よって 証明完了.