ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

東京医科大学
医学部

(2/5実施)

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

$\boxed{1}$

(1)

$$\frac{\cos 25^\circ + \cos 35^\circ}{\sin 40^\circ + \cos 40^\circ} = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}$$

である。

(2) 放物線 $y = 3x^2 - 4x - 5$ と放物線 $y = -2x^2 + 15x + 7$ の 2 つの共有点を通る直線の方程式は、

$$y = \frac{\boxed{\text{ウエ}}}{\boxed{\text{オ}}}x + \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

である。

(3)

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2 - 2x + 1}\,dx = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(4) $\omega = \cos\dfrac{2\pi}{5} + i\sin\dfrac{2\pi}{5}$ とすれば、

$$(2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^3)(2-\omega^4) = \boxed{\text{シス}}$$

である。ただし、i は虚数単位である。

$\boxed{2}$

集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ の部分集合について考える。

(1) 集合 A の部分集合は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 個ある。

(2) 集合 A の部分集合 B, C であって、$B \subset C$ となるような B と C の選び方は全部で $\boxed{\text{エオカキ}}$ 通りある。

(3) 集合 A の部分集合 B, C であって、$B \cap C$ が空集合となるような B と C の選び方は全部で $\boxed{\text{クケコサ}}$ 通りある。

3

正の整数 N の桁数を $f(N)$ で表す。例えば、$f(99)=2,\ f(100)=3$ である。$\log_{10}2=0.3010$ とする。

(1) $f(5^{50})=\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} f(n^2)=\boxed{\text{ウエオ}}$ である。

(3) $f(2^n)=100$ となるような正の整数 n は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 個である。

4

座標空間に平行四辺形 ABCD があり、A$(1,0,0)$, B$(0,1,2)$, D$(3,1,0)$ である。この平行四辺形 ABCD の周および内部を M とし、M を z 軸のまわりに 1 回転して得られる立体を K とする。

(1) C の座標は $(\boxed{\text{ア}},\boxed{\text{イ}},\boxed{\text{ウ}})$ であり、直線 AB と平面 $z=t$ の共有点の座標は

$$\left(\boxed{\text{エ}}-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}t,\ \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}t,\ t\right)$$

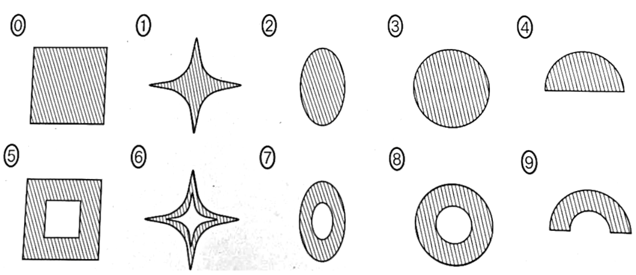
である。

(2) K を平面 $z=t$ $(0\leqq t\leqq 2)$ で切った断面の概形として最も適当なものは $\boxed{\text{ケ}}$ であり、K を平面 $z=1$ で切った断面の面積は $\boxed{\text{コ}}\,\pi$ である。
$\boxed{\text{ケ}}$ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つ選べ。

(3) K の体積は $\boxed{\text{サシ}}\,\pi$ である。

(4) 点 P(a,b,c) が K 上を動くとき、$a^2+b^2+c^2$ の最大値は $\boxed{\text{スセ}}$ である。

$\left[\boxed{\text{ケ}}\ \text{の解答群}\right]$



(1)

$$\frac{\cos 25^\circ + \cos 35^\circ}{\sin 40^\circ + \cos 40^\circ} = \frac{\sqrt{\boxed{ア}}}{\boxed{イ}}$$

である。

(2) 放物線 $y = 3x^2 - 4x - 5$ と放物線 $y = -2x^2 + 15x + 7$ の 2 つの共有点を通る直線の方程式は、

$$y = \frac{\boxed{ウエ}}{\boxed{オ}}x + \frac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}$$

である。

(1)　和積の公式　$\cos A + \cos B = 2\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right)$　を用いて、

$\cos 25^\circ + \cos 35^\circ = \sqrt{3}\cos 5^\circ$

また、三角関数の合成より

$\sin 40^\circ + \cos 40^\circ = \sqrt{2}\cos 5^\circ$ ← $\cos 5^\circ$を作るように合成!!

よって求める答えは、　$\frac{\sqrt{6}}{2}$

(2)

2つの放物線の交点は、それぞれのyが等しいところなので、

$3x^2-4x-5 = -2x^2+15x+7 \Rightarrow 5x^2-19x-12=0$ ← 解を求めにくいと数字が汚くなる!!

この2解をx_1、x_2とすると、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} x_1+x_2 = \frac{19}{5} \\ x_1x_2 = -\frac{12}{5} \end{cases} \Rightarrow x_1^2+x_2^2 = (x_1+x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{481}{25}$$

また、$y_1 = 3x_1^2-4x_1-5$

$y_2 = 3x_2^2-4x_2-5$　と書ける。

2点を通る直線の傾きは

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{3(x_2^2-x_1^2)-4(x_2-x_1)}{x_2-x_1} = 3(x_1+x_2)-4$$

これは $x_1+x_2=\frac{19}{5}$ より　$\frac{37}{5}$ となる。

次に、切片をbとすると、

$y_1 = \frac{37}{5}x_1+b$　$y_2 = \frac{37}{5}x_2+b$　と表せ、

$2b = y_1+y_2-\frac{37}{5}(x_1+x_2)$

$= 3(x_1^2+x_2^2)-4(x_1+x_2)-10-\frac{37}{5}(x_1+x_2)$

$= 3\times\frac{481}{25}-\frac{57}{5}\times\frac{19}{5}-10$

$= \frac{22}{5}$

∴ $b = \frac{11}{5}$　　求める答えは $\frac{37}{5}x+\frac{11}{5}$

(3)

$$\int_0^4 x\sqrt{x^2-2x+1}\,dx = \frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}}$$

である。

(4) $\omega = \cos\frac{2\pi}{5} + i\sin\frac{2\pi}{5}$ とすれば、

$$(2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^3)(2-\omega^4) = \boxed{\text{シス}}$$

である。ただし、i は虚数単位である。

$\boxed{2}$

集合 $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ の部分集合について考える。

(1) 集合 A の部分集合は全部で $\boxed{\text{アイウ}}$ 個ある。

(2) 集合 A の部分集合 B, C であって、$B \subset C$ となるような B と C の選び方は全部で $\boxed{\text{エオカキ}}$ 通りある。

(3) 集合 A の部分集合 B, C であって、$B \cap C$ が空集合となるような B と C の選び方は全部で $\boxed{\text{クケコサ}}$ 通りある。

(3) $\sqrt{x^2-2x+1} = |x-1|$ なので、絶対値つき積分は区間を分割して絶対値外す!

$$\int_0^4 x|x-1|\,dx = \int_0^1 x(1-x)\,dx + \int_1^4 x(x-1)\,dx$$
$$= \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}\right]_1^4$$
$$= \frac{1}{6}+\frac{27}{2}$$
$$= \underline{\frac{41}{3}}$$

(4) $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$ が出てきたら n 乗して 1 になると考える。

ω は5乗して1となるので

$z^5-1 = (z-1)(z-\omega)(z-\omega^2)(z-\omega^3)(z-\omega^4)$ ← $z^5=1$ の5つの解は $1, \omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4$ であるから。

ここで $z=2$ を代入すると。　　この因数分解は頻出のため知っておく!

$(2-\omega)(2-\omega^2)(2-\omega^3)(2-\omega^4) = \underline{31}$

$\boxed{2}$

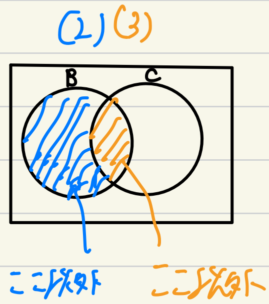
(1) 8つの要素それぞれ含むか含まないか なので

$2^8 = \underline{256}$

(2) $B \subset C$ ということは、8つの要素それぞれについて

「Cに入る」 「Cにのみ入る」 「BにもCにも入る」

の3通りずつ選べるので　$3^8 = \underline{6561}$



(3) $B \cap C$ が空集合より、

「Bのみに入る」・「Cのみに入る」 「BにもCにも入らない」

の3通りずつ選べるので　$3^8 = \underline{6561}$

$\boxed{3}$

正の整数 N の桁数を $f(N)$ で表す。例えば、$f(99)=2$, $f(100)=3$ である。$\log_{10}2=0.3010$ とする。

(1) $f(5^{50}) =$ $\boxed{\text{アイ}}$ である。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} f(n^2) =$ $\boxed{\text{ウエオ}}$ である。

(3) $f(2^n)=100$ となるような正の整数 n は全部で $\boxed{\text{カ}}$ 個である。

これも知っておく!

(1) 桁数は $[\log_{10}N]+1$ と表せる ($[n]$ は n 以下の最大の整数)

$\log_{10}5^{50} = 50\log_{10}5 = 50(1-\log_{10}2) = 34.95$

35桁

(2) 具体的に計算する。

$n=1\sim3$ のとき 1桁

$n=4\sim9$ のとき 2桁

$n=10\sim31$ のとき 3桁 $\Rightarrow 3\times1+6\times2+22\times3+68\times4+5$

$n=32\sim99$ のとき 4桁 $=358$

$n=100$ のとき 5桁

(3) $[n\log_{10}2]+1=100 \Leftrightarrow [0.301n]=99$

よって、

$99 \leqq 0.301n < 100$

$\dfrac{99}{0.301} \leqq n < \dfrac{100}{0.301}$

計算して、$n=329, 330, 331, 332$ の 4通り

4

座標空間に平行四辺形 ABCD があり、A(1,0,0), B(0,1,2), D(3,1,0) である。この平行四辺形 ABCD の周および内部を M とし、M を z 軸のまわりに 1 回転して得られる立体を K とする。

(1) C の座標は (ア , イ , ウ) であり、直線 AB と平面 $z=t$ の共有点の座標は

$$\left(\boxed{エ}-\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}t, \frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}t, t\right)$$

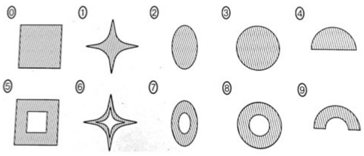
である。

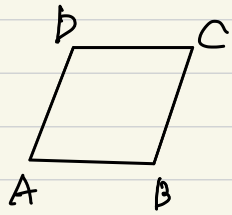
(2) K を平面 $z=t$ $(0 \leqq t \leqq 2)$ で切った断面の概形として最も適当なものは ケ であり、K を平面 $z=1$ で切った断面の面積は コ π である。
ケ の解答は該当する解答群から最も適当なものを一つ選べ。

(3) K の体積は サシ π である。

(4) 点 P(a,b,c) が K 上を動くとき、$a^2+b^2+c^2$ の最大値は スセ である。

[ケ の解答群]



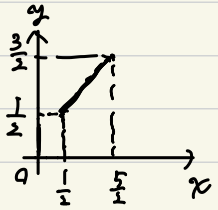


(1) 平行四辺形なので $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AD}=(2,1,0)$
Cの座標は $(0,1,2)+(2,1,0)=\underline{(2,2,2)}$ //

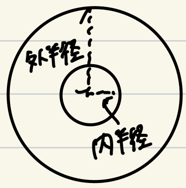
直線 AB の方程式は $(1,0,0)+\alpha(-1,1,2)$ と表される。
$z=t$ より $2\alpha=t$　$\alpha=\frac{t}{2}$　よって、求める座標は $\underline{\left(1-\frac{t}{2}, \frac{t}{2}, t\right)}$ //

(2) パラメータを使って「平行四辺形の中の点」を表す
平行四辺形の内部の点は
$A+u\overrightarrow{AB}+v\overrightarrow{AD}$ $(0\leqq u,v\leqq 1)$
すると、z座標は $2u$　$z=t$ より $u=\frac{t}{2}$
したがって断面上の点は
$(x,y,z)=\left(1-\frac{t}{2}+2v, \frac{t}{2}+v, t\right)$　$(0\leqq v\leqq 1)$
$\Rightarrow (x,y)=\left(1-\frac{t}{2}+2v, \frac{t}{2}+v\right)$
$y=\frac{x}{2}+\frac{3}{4}t-\frac{1}{2}$　$\left(1-\frac{t}{2}\leqq x\leqq 3-\frac{t}{2}\right)$ この線分を z 軸中心で回転させると
ドーナツ形の輪 となる。　$\underline{⑧}$ //

そして、$z=1$で切った時の断面積は (原点から最も近い点で最も遠い点を考える)



この線分を回転させるので、
まず内半径は $\frac{\sqrt{2}}{2}$
外半径は $\frac{\sqrt{34}}{2}$



よって $\pi\left(\frac{17}{2}-\frac{1}{2}\right)=\underline{8\pi}$ //

(3) $z=t$で切った断面の面積を$A(t)$とし、(2)と同様に求めると、
内半径の2乗が $1-t+\frac{t^2}{2}$
外半径の2乗が $10-2t+\frac{t^2}{2}$
よって $A(t)=\pi(9-t)$

求める体積は $\int_0^2 A(t)\,dt=\pi\int_0^2(9-t)\,dt$

$$=\pi\left[9t-\frac{t^2}{2}\right]_0^2$$

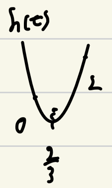
$$=\underline{16\pi}$$ //

(4) $(x,y,z)=\left(1-\frac{t}{2}+2v,\ \frac{t}{2}+v,\ t\right)$ と表せた。
vは大きいほど原点から離れるので $v=1$で考える。
$(x,y,z)=\left(3-\frac{t}{2},\ 1+\frac{t}{2},\ t\right)$
この平方和を計算すると、

$$h(t)=\left(3-\frac{t}{2}\right)^2+\left(1+\frac{t}{2}\right)^2+t^2$$

$$=\frac{3}{2}t^2-2t+10$$

$$=\frac{3}{2}\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{28}{3}$$



図より最大値は $h(2)=12$ 従って求める答えは $\underline{12}$ //