ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

昭和大医学部(I期)

2025年2月7日

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

$\boxed{1}$

複素数 α, β が

$$|\alpha| = \sqrt{2}, \quad |\beta| = 4, \quad |4\alpha - \beta| = 4$$

を満たしているとする。次の問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ および $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^4$ の値を求めよ。

(2) $|\alpha + \beta|$ の値を求めよ。ただし、絶対値の記号を用いないこと。

(3) n は 16 で割って 3 余る整数とする。次の等式が成り立つように a, b を n の式で表せ。

$$|\alpha^n + \beta^n| = \sqrt{2^n(1 - 2^a + 2^b)}$$

(4) 複素数平面において 3 点 O, α, β を頂点とする三角形の面積 S を求めよ。

2

次の各問いに答えよ。ただし、設問 (3-1) を除き答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) (1-1) 2025 と 1928 の最大公約数を求めよ。
(1-2) 次の式が恒等式となるように**正の整数** a_1, a_2, a_3, a_4 を定めよ。

$$\frac{2025}{1928} = 1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}}$$

(2) a, b は $a < b$ を満たす**整数**、$f(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{b}{2}\right)$, $g(x) = f(x^2 - 2)$ とする。$g(x)$ が $f(x)$ で割り切れるような**整数** (a, b) の組をすべて求めよ。なお、解答欄には左から a の値が小さい順に並べて記入すること。a の値が等しい場合には左から b の値が小さい順に並べること。

(3) 不等式

$$|\log_{\frac{1}{2}} x| + |\log_{\frac{1}{2}} y| \leqq 1$$

の表す領域を E とする。
(3-1) 領域 E を図に示せ。ただし、領域 E の内部は斜線で示し、境界上の点を含む場合は実線で、境界上の点を含まない場合は破線で示すこと。必要最小限の注釈は図中に加えてもよい。
(3-2) 領域 E の面積 S を求めよ。

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする。数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする。このとき、S_{2025} の整数部分を求めよ。必要であれば $\sqrt{2026}$ の値は $\sqrt{2025}$ の値で近似せよ。

3

xyz 空間に 3 点 A, B, C がある。A は xy 平面上にあり、$\mathrm{OA} = 1$ である。B, C は yz 平面上の点で、y 軸に関して対称である。三角形 OAB が正三角形であり、3 点 A, B, C は y 軸上にないものとする。次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) B の y 座標を t とするとき、t がとり得る値の範囲を求めよ。

(2) 四面体 OABC の表面積の最大値を求めよ。

(3) 表面積が最大となる四面体 OABC を x 軸、y 軸、z 軸の周りに回転してできる立体の体積をそれぞれ V_x, V_y, V_z とするとき、V_x, V_y, V_z を求めよ。

4

座標平面上の点 $(1, 0)$ に物体 A がある。さいころを振り、1 または 2 の目が出たら、原点のまわりに 15 度時計と逆回りに回転させ、3 から 6 の目が出たときには、原点のまわりに回転させずに、原点から距離 1 だけ注ざける。物体 A が y 軸に達するまでこれを続ける。このとき、物体 A が点 $(0, n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に達する確率を P_n とする。次の問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) P_1, P_2, P_3 を求めよ。

(2) 物体 A が点 $(0, n)$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ に達する確率 P_n を求めよ。

(3) P_n を最大にする n をすべて求めよ。

$\boxed{1}$

複素数 α, β が

$$|\alpha| = \sqrt{2}, \quad |\beta| = 4, \quad |4\alpha - \beta| = 4$$

を満たしているとする。次の問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) $\dfrac{\beta}{\alpha}$ および $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^4$ の値を求めよ。

(2) $|\alpha + \beta|$ の値を求めよ。ただし、絶対値の記号を用いないこと。

$|\alpha| = \sqrt{2}$, $|\beta| = 4$, $|4\alpha - \beta| = 4$

絶対値を外す！ $\dfrac{\beta}{\alpha}$ の形に式変形したい！

$\dfrac{\beta}{\alpha}$, $\left(\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^4$ の値

・絶対値を外す

$$|4\alpha-\beta|^2 = (4\alpha-\beta)(4\bar{\alpha}-\bar{\beta})$$
$$= 16\alpha\bar{\alpha} - 4(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta) + \beta\bar{\beta}$$
$$= 16|\alpha|^2 - 4(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta) + |\beta|^2$$

$|\alpha| = \sqrt{2}$, $|\beta| = 4$ より

$$\therefore\ 4^2 = 16\times(\sqrt{2})^2 - 4(\alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta) + 4^2$$

$$\therefore\ \alpha\bar{\beta}+\bar{\alpha}\beta = 8 \quad \text{①}$$

両辺 $|\alpha|^2$ で割ると　$\dfrac{\beta}{\alpha}$ の形にしたい

$$\therefore\ \frac{\beta}{\alpha} + \overline{\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)} = \frac{8}{|\alpha|^2}$$

$\dfrac{\beta}{\alpha} = z$ とおくと、　$\therefore\ z + \bar{z} = 4$

また $z\bar{z} = \dfrac{\beta\bar{\beta}}{\alpha\bar{\alpha}} = \dfrac{16}{2} = 8$ より

解と係数の関係より

$t^2 - 4t + 8 = 0$ の解であり

$\therefore\ t = 2 \pm 2i$　　$\therefore\ \dfrac{\beta}{\alpha} = 2 \pm 2i$

このとき

$$\frac{\beta}{\alpha} = 2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right\}$$

↓ ド・モアブルを使って

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^4 = 64\left\{\cos(\pm\pi) + i\sin(\pm\pi)\right\}$$
$$= -64$$

(2)

$$|\alpha+\beta|^2 = (\alpha+\beta)(\overline{\alpha+\beta})$$
$$= \alpha\bar{\alpha} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta + \beta\bar{\beta}$$

①より

$$= |\alpha|^2 + 8 + |\beta|^2$$
$$= 26$$

$$|\alpha+\beta| = \sqrt{26}$$

(3) n は 16 で割って 3 余る整数とする。次の等式が成り立つように a, b を n の式で表せ。

$$|\alpha^n + \beta^n| = \sqrt{2^n(1 - 2^a + 2^b)}$$

(4) 複素数平面において 3 点 O, α, β を頂点とする三角形の面積 S を求めよ。

---

(3)

$|\alpha^n + \beta^n|$ ⇒ 値が出てる形にしたい!!

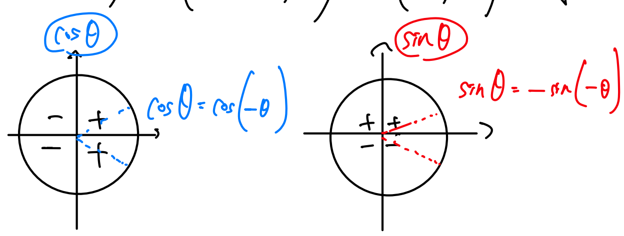
$= |\alpha|^n \cdot \left|1 + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right|$

$= (\sqrt{2})^n \left|1 + (2\sqrt{2})^n \left\{\cos\left(\pm\frac{n\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\frac{n\pi}{4}\right)\right\}\right|$

$n = 16k+3$ (kは整数) と表せるから

$\cos\left(\pm\frac{n\pi}{4}\right) = \cos\left(\pm 4k\pi \pm \frac{3}{4}\pi\right) = \cos\left(\pm\frac{3}{4}\pi\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\sin\left(\pm\frac{n\pi}{4}\right) = \sin\left(\pm 4k\pi \pm \frac{3}{4}\pi\right) = \sin\left(\pm\frac{3}{4}\pi\right) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$



よって

$|\alpha^n + \beta^n| = (\sqrt{2})^n \left|1 + (2\sqrt{2})^n \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} \pm \frac{1}{\sqrt{2}} i\right\}\right|$

$= (\sqrt{2})^n \left|\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})^n\right\} + (2\sqrt{2})^n\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right) i\right|$

$= (\sqrt{2})^n \sqrt{\left\{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}(2\sqrt{2})^n\right\}^2 + \left\{(2\sqrt{2})^n\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}^2}$

$= (\sqrt{2})^n \sqrt{1 - \sqrt{2}(2\sqrt{2})^n + \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^{2n} + \frac{1}{2}(2\sqrt{2})^{2n}}$

$= (\sqrt{2})^n \sqrt{1 - \sqrt{2}(2\sqrt{2})^n + (2\sqrt{2})^{2n}}$

$= \sqrt{2^n\left(1 - 2^{\frac{3}{2}n + \frac{1}{2}} + 2^{3n}\right)}$

$a = \frac{3}{2}n + \frac{1}{2}, \quad b = 3n$ //

(4)

(1)より $\frac{\beta}{\alpha} = 2\sqrt{2}\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)\right\}$

⇓

αはβを原点のまわりに$\left(\pm\frac{\pi}{4}\right)$回転移動した点を表すので

$S = \frac{1}{2}|\alpha| \cdot |\beta| \cdot \sin\frac{\pi}{4}$

$= \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2$

2 //

2

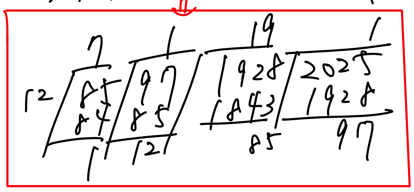
次の各問いに答えよ。ただし、設問 (3-1) を除き答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) (1-1) 2025 と 1928 の最大公約数を求めよ。

(1-2) 次の式が恒等式となるように**正の整数** a_1, a_2, a_3, a_4 を定めよ。

$$\frac{2025}{1928} = 1 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4}}}}$$

(1-1) ユークリッドの互除法を用いて



$2025 = 1928 + 97$

$1928 = 97 \times 19 + 85$

$97 = 85 \times 1 + 12$

$85 = 12 \times 7 + 1$

よって 1 //

(1-2)

(1-1) が別の方法で書かれているから

$$\frac{2025}{1928} = 1 + \frac{97}{1928}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1928}{97}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{19 + \cfrac{85}{97}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{19 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{12}{85}}}$$

$$= 1 + \cfrac{1}{19 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{12}}}}$$

$\therefore\ a_1 = 19,\ a_2 = 1,\ a_3 = 7,\ a_4 = 12$ //

(2) a, b は $a < b$ を満たす**整数**、$f(x) = \left(x - \dfrac{a}{2}\right)\left(x - \dfrac{b}{2}\right)$, $g(x) = f(x^2 - 2)$ とする。$g(x)$ が $f(x)$ で割り切れるような**整数** (a, b) の組をすべて求めよ。なお、解答欄には左から a の値が小さい順に並べて記入すること。a の値が等しい場合には左から b の値が小さい順に並べること。

$$f(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)\left(x - \frac{b}{2}\right)$$

$$g(x) = f(x^2 - 2)$$ $f(x)$にx^2-2を代入して

$$= \left(x^2 - 2 - \frac{a}{2}\right)\left(x^2 - 2 - \frac{b}{2}\right)$$

$g(x)$が$f(x)$で割り切れるとき

⇓ 言い換えると

$f(x)=0$になるとき、$g(x)=0$

⇓

$$\begin{cases} g\left(\dfrac{a}{2}\right) = 0 & \text{——①} \\ g\left(\dfrac{b}{2}\right) = 0 & \text{——②} \end{cases}$$

①は

$$\left(\frac{a^2}{4} - 2 - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{a^2}{4} - 2 - \frac{b}{2}\right) = 0$$

$\therefore (a^2 - 2a - 8)(a^2 - 2b - 8) = 0$

$\therefore (a+2)(a-4)(a^2 - 2b - 8) = 0$

$\therefore a = -2,\ a = 4,\ a^2 - 2b - 8 = 0$

②

$$\left(\frac{b^2}{4} - 2 - \frac{a}{2}\right)\left(\frac{b^2}{4} - 2 - \frac{b}{2}\right) = 0$$

$\therefore (b^2 - 2a - 8)(b^2 - 2b - 8) = 0$

$\therefore (b+2)(b-4)(b^2 - 2a - 8) = 0$

$\therefore b = -2,\ 4,\ b^2 - 2a - 8 = 0$ //

①、②のそれぞれの場合について調べていく

・$a = -2$のとき

$a = -2$, $b = 4$, $b^2 - 4 = 0$

$\therefore$ $a < b$を満たすのは

$(-2, 4)$, $(-2, 2)$

・$a = 4$のとき

②により $b = -2, 4$, $b^2 - 16 = 0$

$a < b$を満たすものはないので不適.

・$a^2 - 2b - 8 = 0$のとき

$b = -2, 4$, $b^2 - 2a - 8 = 0$

⑦ $b = -2$のとき $a^2 = 4$　$a < b$より 不適

① $b = 4$のとき $a^2 = 16$　$a < b$より $a = -4$

(ウ) $b^2-2a-8=0$ のとき

$a^2-2b-8=0$ との差より

$\therefore a^2-b^2+2(a-b)=0$

$\therefore (a+b)(a-b)+2(a-b)=0$

$\therefore (a-b)(a+b+2)=0$

$a\neq b$ より　$a+b=-2$ より

2式の和より　$a^2+b^2-2(a+b)-16=0$

(a+b と ab をつくり ab をだしたい!)

$\therefore (a+b)^2-2ab-2(a+b)-16=0$

$\therefore 4-2ab+4-16=0$

$\therefore ab=-4$

よって解と係数の関係より

a, b は $t^2+2t-4=0$ の解であり

これを満たす整数はないため不適

$\therefore (a,b)=(-2,2),(-2,4)$

$(-4,4)$ //

(3) 不等式

$$|\log_{\frac{1}{2}} x| + |\log_{\frac{1}{2}} y| \leqq 1$$

の表す領域を E とする。

(3-1) 領域 E を図に示せ。ただし、領域 E の内部は斜線で示し、境界上の点を含む場合は実線で、境界上の点を含まない場合は破線で示すこと。必要最小限の注釈は図中に加えてもよい。

(3-2) 領域 E の面積 S を求めよ。

(3−1)

$\log_{\frac12}x,\ \log_{\frac12}y$ は $x=1, y=1$ で 0 になるため

㋐ $x\geqq1,\ y\geqq1$ のとき

$-\log_{\frac12}x-\log_{\frac12}y\leqq1$

$\therefore \log_{\frac12}xy\geqq-1 \quad \therefore xy\leqq2$

㋑ $x\geqq1,\ 0<y\leqq1$ のとき

$-\log_{\frac12}x+\log_{\frac12}y\leqq1$

$\therefore \log_{\frac12}y\leqq\log_{\frac12}\frac{x}{2} \quad \therefore y\geqq\frac{x}{2}$

㋒ $0<x\leqq1,\ y\geqq1$ のとき

$\log_{\frac12}x-\log_{\frac12}y\leqq1$

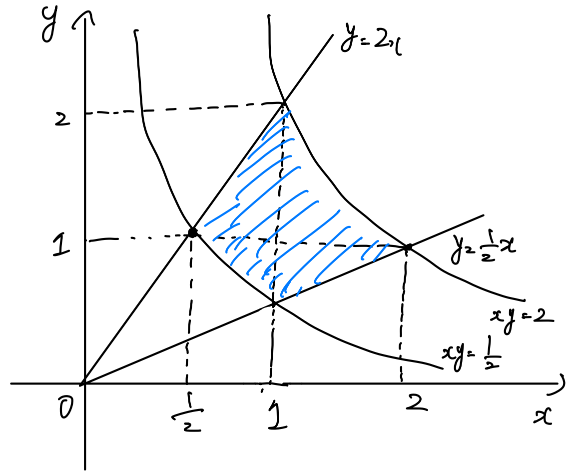
$\therefore \log_{\frac12}\frac{y}{2}\geqq\log_{\frac12}x \quad \therefore y\leqq2x$

㋓ $0<x\leqq1,\ 0\leqq y\leqq1$ のとき

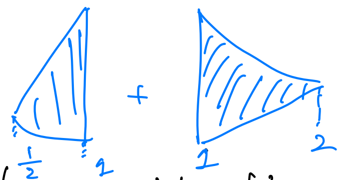
$\log_{\frac12}x+\log_{\frac12}y\leqq1$

$\therefore \log_{\frac12}xy\leqq1 \quad \therefore xy\geqq\frac12$

㋐、㋑、㋒、㋓より図示すると



(1−2)

$S=$ 

$$S=\int_{\frac12}^{1}\left(2x-\frac{1}{2x}\right)dx+\int_{1}^{2}\left(\frac{2}{x}-\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\left[x^2-\frac12\log x\right]_{\frac12}^{1}+\left[2\log x-\frac{x^2}{4}\right]_{1}^{2}$$

$$=1-\left(\frac14+\frac12\log2\right)+\left(2\log2-1\right)+\frac14$$

$$=\frac32\log2$$

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ とする。数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とする。このとき、S_{2025} の整数部分を求めよ。必要であれば $\sqrt{2026}$ の値は $\sqrt{2025}$ の値で近似せよ。

S_n を直接求められない！

定石
不等式で評価しよう！！

a_n と a_{n+1} の評価

$a_{n+1} < a_n$ より

$$a_{n+1} < a_n + a_{n+1} < a_n$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{n+1}} < \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{n+1}} < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$n = 1, 2, \cdots\cdots, 2024$ までの和をとると

$$(\text{左辺}) = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2024}} + \frac{1}{\sqrt{2025}}$$

$$= S_{2025} - 1$$

$$(\text{中辺}) = 2\{(\cancel{\sqrt{2}} - 1) + (\cancel{\sqrt{3}} - \cancel{\sqrt{2}}) + \cancel{\cdots}$$

$$\cancel{\cdots} + (\cancel{\sqrt{2024}} - \cancel{\sqrt{2023}}) + (\sqrt{2025} - \cancel{\sqrt{2024}})\}$$

$$= 2(\sqrt{2025} - 1)$$

$$(\text{右辺}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2024}}$$

$$= S_{2024}$$

$$= S_{2025} - \frac{1}{\sqrt{2025}}$$

$$\therefore S_{2025} - 1 < 2(\sqrt{2025} - 1) < S_{2025} - \frac{1}{\sqrt{2025}}$$

$$\therefore S_{2025} - 1 < 88 < S_{2025} - \frac{1}{45}$$

$$\therefore 88 + \frac{1}{45} < S_{2025} < 89$$

よって 整数部分は $\underline{88}$ //

3

xyz 空間に 3 点 A, B, C がある。A は xy 平面上にあり、OA $=1$ である。B, C は yz 平面上の点で、y 軸に関して対称である。三角形 OAB が正三角形であり、3 点 A, B, C は y 軸上にないものとする。次の各問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) B の y 座標を t とするとき、t がとり得る値の範囲を求めよ。

(2) 四面体 OABC の表面積の最大値を求めよ。

$A(p,q,0)$、$B(0,t,-s)$、$C(0,t,s)$

⇓

y軸に関して対称だから!

ただし $p\neq 0$, $p^2+q^2=1$ であり $s>0$ とする。

(∵ 一般性を失わないから)

(1) 条件より OA = OB = AB より

$1 = t^2+s^2 = p^2+(q-t)^2+s^2$

$$\begin{cases} t^2+s^2=1 & \text{—①} \\ 1-2qt=0 & \text{—②} \end{cases}$$

①より $s>0$ なので $-1<t<1$

②より $2qt-1=0$ —③

tを固定して tの1次を考える!

$f(q)=2tq-1$ とすると

実数 q が存在する条件は

1次を丁寧に絞っていこう!

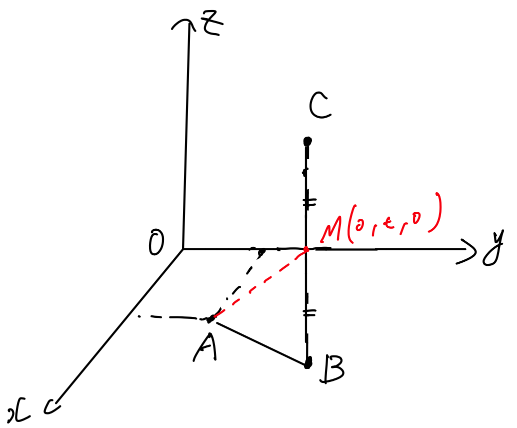
$t\neq 0$ かつ $f(q)=0$ の時の q の値は $-1<q<1$

($\because p^2+q^2=1$)

$\therefore\ t\neq 0$, $f(-1)\times f(1)<0$

$\therefore\ t\neq 0$, $(-2t-1)(2t-1)<0$

$\therefore\ \underline{-1<t<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<t<1}$ //



点Bと点Cは yz平面で y軸対称であるため、

OC = OB = 1　∠AOC = ∠AOB $=\frac{\pi}{3}$ である。

⇓

△OAC は正三角形

(AC = 1 より △OBC ≡ △ABC)

また

△OAB $=\frac{\sqrt{3}}{4}$、△OBC $=\frac{1}{2}\cdot|t|\cdot 2s$

$= s\cdot|t|$ より

点Aと BC の中点 $M(0,t,0)$ との

距離 d は $d=\sqrt{p^2+(q-t)^2}$

$=\sqrt{1-2qt+t^2}$

③より $\boxed{d=|t|}$

よって

$$\triangle ABC = \frac{1}{2}|t| \cdot 2s = s|t|$$

なので表面積 S は

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} + s|t| + s|t|$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} + 2s|t|$$

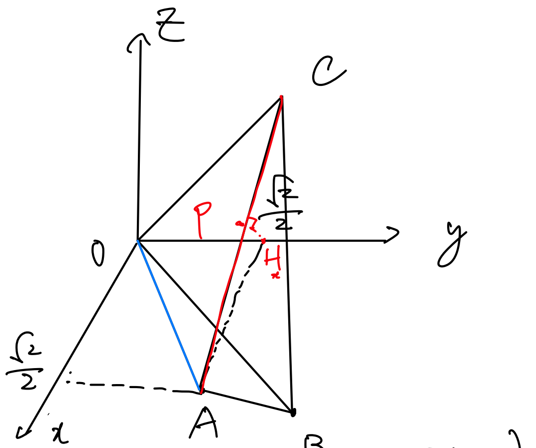
相加・相乗平均を用いて

$$s^2 + t^2 \geqq 2\sqrt{s^2 \cdot t^2} = 2s|t| \quad (s>0より)$$

$$\therefore\ 2s|t| \leqq 1$$

したがって $s = |t| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のときに

$$\max S = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$$



V_x 線分AB上の点 $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}(1-\alpha)\right)$ を x軸上の点 $H_x\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\alpha, 0, 0\right)$ を中心に回転すると

$$PH_x = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(1-\alpha)^2}$$

よって

$$V_x = \pi\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} PH_x^2\, dx - \frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$x = \frac{\sqrt{2}}{2}\alpha$ とおくと

置換したらバイを忘れずに!!

$$\frac{dx}{d\alpha} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

x	$0 \to \frac{\sqrt{2}}{2}$
α	$0 \to 1$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\int_0^1 \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\alpha-1)^2\right\} d\alpha - \frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$

$$= \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{6}(\alpha-1)^3\right]_0^1 - \frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4}\pi$$

V_z $V_z = 2V_x = \frac{\sqrt{2}}{2}\pi$

V_y y軸まわりに線分OAをまわせばいいので

V_yは 三角錐 になる!

$$V_y = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{12}\pi$$

(3) 表面積が最大となる四面体 OABC を x 軸、y 軸、z 軸の周りに回転してできる立体の体積をそれぞれ V_x, V_y, V_z とするとき、V_x, V_y, V_z を求めよ。

$S = |t| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ のとき $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$ として考える

③より $\sqrt{2}u - 1 = 0$ より $\therefore u = \frac{\sqrt{2}}{2}$

よって

$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)$, $B\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,

$C\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

↓ 図をかいてみる

$\boxed{4}$

座標平面上の点 $(1,0)$ に物体 A がある。さいころを振り、1 または 2 の目が出たら、原点のまわりに 15 度時計と逆回りに回転させ、3 から 6 の目が出たときには、原点のまわりに回転させずに、原点から距離 1 だけ遠ざける。物体 A が y 軸に達するまでこれを続ける。このとき、物体 A が点 $(0,n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ に達する確率を P_n とする。次の問いに答えよ。ただし、答えは結果のみを解答欄に記入せよ。

(1) P_1, P_2, P_3 を求めよ。

(2) 物体 A が点 $(0,n)$ $(n=1,2,3,\cdots)$ に達する確率 P_n を求めよ。

A: $\frac{1}{3}$ で反時計回りに15°回転移動

B: $\frac{2}{3}$ で原点から1遠ざかる

(1)

P_1 = A が6回つづけておこる確率

$$= \left(\frac{1}{3}\right)^6 = \frac{1}{729}$$

P_2 = 6回中Aが5回、Bが1回 で最後にAがおこる確率

$$= {}_6C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1 \times \frac{1}{3} = \frac{4}{729}$$

P_3 = 7回中Aが5回, Bが2回おこり、最後にAが起こる確率

$$= {}_7C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{28}{2187}$$

(2) $A(1,0) \xrightarrow{n回} A(0,n)$ に至っての確率

⇒ $(n+4)$回のうち、Aが5回、Bが$n-1$回起こり、最後にAが起こるときであるから

よって

$$P_n = {}_{n+4}C_5\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \times \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2^{n-1}\cdot {}_{n+4}C_5}{3^{n+5}}$$

$$= \frac{2^{n-1}}{3^{n+5}}\cdot\frac{(n+4)(n+3)(n+2)(n+1)n}{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}$$

$$= \frac{2^{n-4}}{5\cdot3^{n+6}}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

(3) P_n を最大にする n をすべて求めよ。

P_n の最大値

定石

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{P_{n+1}}{P_n} \text{ を考える！！}}$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = \frac{\dfrac{\cancel{2^{n-3}}\,1}{\cancel{5\cdot 3^{n+7}}\,1}\cdot\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}\cancel{(n+3)}\cancel{(n+4)}(n+5)}{\dfrac{\cancel{2^{n-4}}}{\cancel{5\cdot 3^{n+6}}}\,n\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}\cancel{(n+3)}\cancel{(n+4)}}$$

$$= \frac{2(n+5)}{3n}$$

$n \geqq 1$ であることを考えると、

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} > 1 \iff 1 \leqq n < 10$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} = 1 \iff n = 10$$

$$\frac{P_{n+1}}{P_n} < 1 \iff n > 10 \quad \text{より}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{P_1 < P_2 < \cdots < P_9 < P_{10} = P_{11} > P_{12} > P_{13} > \cdots}$$

よって max の n は $10, 11$