ゴウカライズ
数学
2025
大学入試 解答速報

慶應義塾大学
医学部

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

ゴウカライズメディカル HP

公式LINE 無料相談実施中

医学部受験なら
ゴウカライズメディカル

$\boxed{1}$

以下の設問（5）に答え，文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．

(1) 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき，$0 \leqq Z \leqq u$ となる確率を $p(u)$ で表す．いくつかの u の値に対する $p(u)$ の値を以下の表にまとめた．

u	0.67	1.00	1.64	1.80	2.00	2.50
$p(u)$	0.2486	0.3413	0.4495	0.4641	0.4772	0.4938

この表を用いて，身長の分布について考察してみよう．
ある年の高校 3 年生女子の身長は，平均 158 cm，標準偏差 5 cm の正規分布に従うと仮定する．この年の高校 3 年生女子の中で，身長が 153 cm 以上 170.5 cm 以下の生徒は約 $\boxed{\text{あ}}$ % いる．この年の高校 3 年生女子の中で，身長が低い方から 2.5 % の中に入る生徒の身長は $\boxed{\text{い}}$ cm 以下である．ただし，空欄（あ）には小数第 1 位を四捨五入し，整数値を入れ，空欄（い）には当てはまる最も大きい整数値を入れなさい．

(2) 連続型確率変数 X のとりうる値の範囲が $1 \leqq X \leqq e$ であり，その確率密度関数が

$$f(x) = rx\log x \quad (1 \leqq x \leqq e)$$

と与えられている．ただし，r は定数であり，e は自然対数の底である．このとき，$r = \boxed{\text{う}}$ である．

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \sin^3\left(\frac{k\pi}{2n}\right) = \boxed{\text{え}}$$

である．

(4) i を虚数単位とし，方程式 $z^3 = 12(1+\sqrt{3}i)$ の異なる 3 つの解を α, β, γ とする．複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta)$, $\mathrm{C}(\gamma)$ を頂点とする $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を 3^s と表すと，$s = \boxed{\text{お}}$ である．ただし，空欄（お）には分数を入れなさい．

(5) a, b, c, d を整数とし，$c \neq 0$ または $d \neq 0$ とする．$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，以下の 4 条件

$$a \geqq 0, \quad b \geqq 0, \quad \frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d} = 2\sqrt{2}, \quad ad+bc = 18$$

を満たす組 (a, b, c, d) をすべて求めなさい．ただし，答えだけでなく思考過程も書きなさい．

公式LINE
ゴウカライズメディカル HP
医学部受験ならゴウカライズメディカル
公式 LINE（こちら）で無料相談受付中！
公式 𝕏（@goukalize）では解答速報公開中！

2

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．ただし，空欄 (か), (そ) には n の式を入れ，それ以外の空欄には数を入れなさい．

袋が 1 つ，赤玉 3 個，白玉 3 個が用意されている．赤玉が少なくとも 1 個袋に入った状態に対して，操作 T の手順を以下のように定める．

> **操作 T**　袋から玉を 1 個無作為に取り出し，それが赤玉であれば袋に戻し，白玉であれば袋に戻さない．

n を自然数とする．

(1) 赤玉 3 個と白玉 3 個が袋に入った状態から始めて，操作 T を n 回施し終えたとき，袋の中に入っている白玉の個数が 3 個である確率を a_n，2 個である確率を b_n，1 個である確率を c_n とする．このとき，次の関係式

$$a_{n+1} = \boxed{\text{(あ)}}\,a_n,$$
$$b_{n+1} = \boxed{\text{(い)}}\,a_n + \boxed{\text{(う)}}\,b_n,$$
$$c_{n+1} = \boxed{\text{(え)}}\,b_n + \boxed{\text{(お)}}\,c_n$$

が成り立つ．

これより，a_n, b_n, c_n をそれぞれ n の式で表すと

$$a_n = \boxed{\text{(か)}}$$
$$b_n = \boxed{\text{(き)}}\left(\boxed{\text{(く)}}^{\,n} - \boxed{\text{(け)}}^{\,n}\right)$$
$$c_n = \boxed{\text{(こ)}}\left(\boxed{\text{(さ)}}^{\,n-1} + \boxed{\text{(し)}}\left(\boxed{\text{(す)}}\right)^{n-1} + \left(\boxed{\text{(せ)}}\right)^{n-1}\right)$$

である．ただし，$\boxed{\text{(さ)}} > \boxed{\text{(せ)}}$ とする．

(2) 赤玉が少なくとも 1 個袋に入った状態に対して，ゲーム T のルールを以下のように定める．

> **ゲーム T**　操作 T を 1 回施し，その結果，白玉が 3 個袋に入っている場合に限り 1 点を得る．

赤玉 3 個と白玉 3 個が袋に入った状態から始めて，ゲーム T を n 回行い終えたとき，1 回目から n 回目までに得た点の合計を X_n とし，$Y_n = 2^{X_N}$ と定める．このとき，Y_n の期待値は $\boxed{\text{(そ)}}$ であり，分散は

$$\boxed{\text{(た)}}\,2^{n-1} + \boxed{\text{(ち)}}\,n^2 + \boxed{\text{(つ)}}\,n + \boxed{\text{(て)}}$$

である．

公式LINE　ゴウカライズメディカル HP
医学部受験ならゴウカライズメディカル
公式 LINE（こちら）で無料相談受付中！
公式 𝕏（@goukalize）では解答速報公開中！

$\boxed{3}$

以下の設問 (1) (ii) に答え，文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．以下，すべての多項式は，実数を係数とする x についての多項式であるとする．

(1)　(i) 3 次式 $P(x)=3x^3-9x^2+7x$ と 2 次式 $Q(x)=2x^2+1$ について，合成関数 $P(Q(x))$ は多項式 $\boxed{(あ)}$ で表される．

(ii) 多項式の積の展開より，2 つの多項式 $G(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$ と $H(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$ の合成関数 $G(H(x))$ は多項式で表される．n が自然数であって $b_n\neq 0$ であるとき，$G(H(x))=0$ が x についての恒等式ならば，$a_m=\cdots=a_0=0$ となることを示しなさい．

(2) $f(x)$ を 0 でない多項式とし，

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt,\quad h(x)=\int_x^1 f(t)dt$$

と定める．さらに，$g(1)$ を a と表し，以下の 2 条件が成り立つとする．

- ある定数 b,c,d が存在して，x についての恒等式

$$g(h(x))-\left[\{h(x)\}^3+b\{g(x)\}^2+ch(x)+d\right]=0$$

が成り立つ．

- 等式 $f(1)=2(1-a)$ が成り立つ．

以下において (う)，(き)，(く)，(せ) には数を入れ，他の空欄は a を用いて表しなさい．

(i) $g(x)+h(x)=\boxed{(い)}$ であり，(1)(ii) を用いると，$g(x)$ は $\boxed{(う)}$ 次式であり，$b=\boxed{(え)}$，$c=\boxed{(お)}$，$d=\boxed{(か)}$ であることがわかる．

(ii) 関数 $g(x)$ が極値をもつための必要十分条件は $a<\boxed{(き)}$ または $a>\boxed{(く)}$ である．a がこの条件を満たすとき，$g(x)$ は $x=\boxed{(け)}$ で極大値 M をとる．また，方程式 $g(x)=M$ の解は $x=\boxed{(こ)}$ と $x=\boxed{(さ)}$ である．

(iii) 曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(a,g(a))$ における接線の方程式は，

$$y=\boxed{(し)}\,x+\boxed{(す)}$$

である．さらに，

$$F(a)=\int_0^a\left\{g(x)-\boxed{(さ)}\,x-\boxed{(し)}-2(x-a)\right\}e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}dx$$

と定める．ただし，e は自然対数の底である．このとき，$F(a)=\boxed{(す)}$ と表され，a の関数 $F(a)$ の最大値は $\boxed{(せ)}$ である．

公式LINE
ゴウカライズメディカル HP
医学部受験ならゴウカライズメディカル
公式 LINE（こちら）で無料相談受付中！
公式 𝕏（@goukalize）では解答速報公開中！

$\boxed{4}$

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．

(1) 座標平面において，連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$ の表す正方形 S を考える．正方形 S の辺上の異なる 5 点

$$P_0(0,0),\ P_1(p_1,1),\ P_2(1,q_2),\ P_3(p,0),\ P_4(p_4,q_4)$$

は次の条件を満たすとする．$i=1,2,3$ に対して，点 P_i は正方形 S の頂点でなく，点 P_i を通る正方形 S の辺を線分 $\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i$ と表すとき，$\angle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ が成り立つ．ただし，$0^\circ < \angle P_{i-1}P_iA_i = \angle P_{i+1}P_iB_i$ が成り立つ．ただし，$0 < \angle P_{i-1}P_iA_i < 90^\circ$ とする．
このとき，$p_1 = \boxed{\text{(あ)}}$，　$q_2 = \boxed{\text{(い)}}$ である．さらに，$0 < p \leqq \boxed{\text{(う)}}$ のとき $(p_4, q_4) = (0, \boxed{\text{(え)}})$ であり，$\boxed{\text{(う)}} \leqq p < 1$ のとき $(p_4, q_4) = (\boxed{\text{(お)}}, 1)$ である．ただし，$\boxed{\text{(う)}}$ には数を入れ，それ以外の上記の空欄は p を用いて表しなさい．

(2) 座標空間において，連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$, $0 \leqq z \leqq 1$ の表す立方体 T を考える．立方体 T の面上の異なる 5 点

$$Q_0(0,0,0),\ Q_1(a_1,b_1,1),\ Q_2(a_2,1,c_2),\ Q_3(a,b,0),\ Q_4(a_4,b_4,c_4)$$

は次の条件を満たすとする．$i=1,2,3$ に対して，点 Q_i は立方体 T の頂点ではなく，T の辺上にもない．さらに，点 Q_i を含む立方体 T の面は，3 点 $\mathrm{Q}_{i-1}, \mathrm{Q}_i, \mathrm{Q}_{i+1}$ の定める平面と直交し，この 2 つの面が共有する線分を $\mathrm{C}_i\mathrm{D}_i$ と表すとき，$\angle Q_{i-1}Q_iC_i = \angle Q_{i+1}Q_iD_i$ が成り立つ．ただし，$0^\circ < \angle Q_{i-1}Q_iC_i < 90^\circ$ とする．

(i) 2 点 $(0,0,0), (a_1,b_1,0)$ を通る直線と平面 $y=1$ の交点の座標は a_1, b_1 を用いて $(\boxed{\text{(か)}}, 1, 0)$ と表されるので，$a_2 = \boxed{\text{(か)}}$ である．

(ii) a, b, を用いて $a_1 = (\boxed{\text{(き)}})$, $b_1 = (\boxed{\text{(く)}})$, $a_2 = \boxed{\text{(け)}}$, $c_2 = \boxed{\text{(こ)}}$ と表される．さらに，$a_4 = 1$, $b_4 = 0$ となるための必要十分条件は，$\boxed{\text{(さ)}} \leqq a < 1$ かつ $b = \boxed{\text{(し)}}$ となることであって，この条件が成り立つならば，$c_4 = \boxed{\text{(す)}}$ である．また，$0 < a \leqq \boxed{\text{(さ)}}$ かつ $\boxed{\text{(さ)}} \leqq b < 1$ であるとき，$(a_4, b_4, c_4) = (\boxed{\text{(せ)}}, \boxed{\text{(そ)}}, 1)$ である．ただし，(さ) には数を入れ，(し), (す) は a を用いて，(せ)，(そ) は a, b を用いて表しなさい．

公式LINE
ゴウカライズメディカル HP
医学部受験ならゴウカライズメディカル
公式 LINE（こちら）で無料相談受付中！
公式 𝕏（@goukalize）では解答速報公開中！

(1) 確率変数 Z が標準正規分布 $N(0,1)$ に従うとき，$0 \leqq Z \leqq u$ となる確率を $p(u)$ で表す．いくつかの u の値に対する $p(u)$ の値を以下の表にまとめた．

u	0.67	1.00	1.64	1.80	2.00	2.50
$p(u)$	0.2486	0.3413	0.4495	0.4641	0.4772	0.4938

この表を用いて，身長の分布について考察してみよう．
ある年の高校 3 年生女子の身長は，平均 158 cm，標準偏差 5 cm の正規分布に従うと仮定する．この年の高校 3 年生女子の中で，身長が 153 cm 以上 170.5 cm 以下の生徒は約 $\boxed{\text{あ}}$ % いる．この年の高校 3 年生女子の中で，身長が低い方から 2.5 % の中に入る生徒の身長は $\boxed{\text{い}}$ cm 以下である．ただし，空欄（あ）には小数第 1 位を四捨五入し，整数値を入れ，空欄（い）には当てはまる最も大きい整数値を入れなさい．

(2) 連続型確率変数 X のとりうる値の範囲が $1 \leqq X \leqq e$ であり，その確率密度関数が

$$f(x) = rx\log x \quad (1 \leqq x \leqq e)$$

と与えられている．ただし，r は定数であり，e は自然対数の底である．このとき，$r = \boxed{\text{う}}$ である．

(1)

$$P(153 \leqq X \leqq 158) = P\left(\frac{153-158}{5} \leqq Z \leqq \frac{170.5-158}{5}\right)$$
$$= P(-1 \leqq Z \leqq 2.5)$$
$$= 0.3413 + 0.4938$$
$$= 0.8351$$

84%

「下から 2.5%」の相当する標準正規Zの値は、よく知られた近似で -1.96

表のデータの1.9〜2.0の間を補間して求めてもよい。

元の単位に戻すと．$x = 158 + 5 \times (-1.96)$
$= 148.2$

148cm

(2) $r\displaystyle\int_1^e x\log x\,dx = 1$ となればよいので

$$r\left[\frac{1}{2}x^2\log x - \frac{x^2}{4}\right]_1^e$$
$$= r\left(\frac{e^2+1}{4}\right)$$

$$r = \frac{4}{e^2+1}$$

(3)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin^3\left(\frac{k\pi}{2n}\right)=\boxed{\text{え}}$$

である．

(4) i を虚数単位とし，方程式 $z^3=12(1+\sqrt{3}i)$ の異なる 3 つの解を α,β,γ とする．複素数平面上の 3 点 A(α), B(β), C(γ) を頂点とする △ABC の面積を 3^s と表すと，$s=\boxed{\text{お}}$ である．ただし，空欄（お）には分数を入れなさい．

(5) a,b,c,d を整数とし，$c\neq0$ または $d\neq0$ とする．$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いて，以下の 4 条件

$$a\geqq0,\quad b\geqq0,\quad \frac{a\sqrt{2}+b}{c\sqrt{2}+d}=2\sqrt{2},\quad ad+bc=18$$

を満たす組 (a,b,c,d) をすべて求めなさい．ただし，答えだけでなく思考過程も書きなさい．

(3) 区分求積の公式を用いて問題の式は

$$\int_0^1\sin^3\left(\frac{\pi}{2}x\right)dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3t\,dt$$ （$t=\frac{\pi}{2}x$ と置換した）

また、$\int\sin^3t\,dt=\int\sin t(1-\cos^2t)dt$

$$=-\cos t+\frac{\cos^3t}{3}+C$$ （Cは積分定数）

よって求める答えは

$$\frac{2}{\pi}\left[-\cos t+\frac{\cos^3t}{3}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3\pi}$$ //

(4) $z^3=24\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=24(\cos(60°+2n\pi)+i\sin(60°+2n\pi))$ $n=(0,1,2)$

よって z は半径 $2\cdot\sqrt[3]{3}$ の円周上にある。（ド・モアブルの定理より）

正三角形の頂点が半径 r の円周上にあるとき，

の辺の長さは $\sqrt{3}r$，面積は $\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{3}r)^2=\frac{3\sqrt{3}}{4}r^2$

$\frac{3\sqrt{3}}{4}\cdot4\cdot3^{\frac{2}{3}}=3^{\frac{13}{6}}$

$\frac{13}{6}$ //

$a\sqrt{2}+b=4c+2\sqrt{2}d$ （整数 p, q について $p+q\sqrt{2}=0 \Rightarrow p=0$ かつ $q=0$ を用いる。）

$(a-2d)\sqrt{2}+b-4c=0$

$\sqrt{2}$ が無理数なので $a=2d$ $b=4c$

$ad+bc=18$ に代入すると，$2d^2+4c^2=18$ $d^2+2c^2=9$

$c\geqq0$ $d\geqq0$ より 組み合わせは $(1,2)$ or $(3,0)$

よって $(2,4,2,1)$ $(6,0,0,3)$ //

2

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．ただし，空欄 (か), (そ) には n の式を入れ，それ以外の空欄には数を入れなさい．

袋が 1 つ，赤玉 3 個，白玉 3 個が用意されている．赤玉が少なくとも 1 個袋に入った状態に対して，操作 T の手順を以下のように定める．

> **操作 T**　袋から玉を 1 個無作為に取り出し，それが赤玉であれば袋に戻し，白玉であれば袋に戻さない．

n を自然数とする．

(1) 赤玉 3 個と白玉 3 個が袋に入った状態から始めて，操作 T を n 回施し終えたとき，袋の中に入っている白玉の個数が 3 個である確率を a_n, 2 個である確率を b_n, 1 個である確率を c_n とする．このとき，次の関係式

$$a_{n+1} = \boxed{(あ)}\,a_n,$$
$$b_{n+1} = \boxed{(い)}\,a_n + \boxed{(う)}\,b_n,$$
$$c_{n+1} = \boxed{(え)}\,b_n + \boxed{(お)}\,c_n$$

が成り立つ．

これより，a_n, b_n, c_n をそれぞれ n の式で表すと

$$a_n = \boxed{(か)}$$
$$b_n = \boxed{(き)}\left(\boxed{(く)} - \boxed{(け)}^n\right)$$
$$c_n = \boxed{(こ)}\left(\boxed{(さ)} + n\boxed{(し)} + n^2\boxed{(す)}\right)$$

である．ただし，$\boxed{(さ)} > \boxed{(せ)}$ とする．

a_n から赤玉を取り出して戻すと a_{n+1} になるので．

$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n$ ‥ ①

b_{n+1} は a_n から白を取り出すか，b_n から赤を取り出すとなるので．

$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{5}b_n$ ‥ ②

c_{n+1} は b_n から白を取り出すか，c_n から赤を取り出すとなるので

$c_{n+1}=\frac{2}{5}b_n+\frac{3}{4}c_n$ ‥ ③

$a_1=\frac{1}{2}$ と ① より　$a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$ //

$b_{n+1}=\frac{3}{5}b_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

両辺に 2^{n+1} をかけると，

$2^{n+1}b_{n+1}=\frac{6}{5}\cdot 2^n b_n+1$

$2^n b_n$ を p_n とおくと，

$p_{n+1}=\frac{6}{5}p_n+1$

$p_{n+1}+5=\frac{6}{5}(p_n+5)$

$p_1=1$ より　$p_n=6\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^{n-1}-5$　　$b_n=5\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$ //

$=5\left\{\left(\frac{6}{5}\right)^n-1\right\}$

公式LINE
ゴウカライズVET HP
医学部受験ならゴウカライズメディカル
公式 LINE（こちら）で無料相談受付中！
公式 𝕏（@goukalize）では解答速報公開中！

$$C_{n+1}=\frac{3}{4}C_n+2\left\{\left(\frac{3}{5}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

$$\left(\frac{5}{3}\right)^{n+1}C_{n+1}=\frac{5}{4}\cdot\left(\frac{5}{3}\right)^n C_n+\frac{10}{3}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$

$$g_{n+1}=\frac{5}{4}g_n+\frac{10}{3}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$ （$\left(\frac{5}{3}\right)^n C_n=g_n$ とおく。）

$$g_{n+1}-8\left(\frac{5}{6}\right)^{n+1}+\frac{40}{3}=\frac{5}{4}\left(g_n-8\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{40}{3}\right)$$ （なんとか $A_{n+1}=pA_n$ の形を作り出す）

$g_1=0$ より　$g_n-8\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{40}{3}=-\frac{40}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}$ ∴ $g_n=8\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{40}{3}\left(\frac{5}{4}\right)^{n-1}-\frac{40}{3}$

$$\underline{C_n=\frac{16}{3}\left(\frac{3}{4}\right)^n-\frac{40}{3}\left(\frac{3}{5}\right)^n+8\left(\frac{1}{2}\right)^n}\ //$$

(2) 赤玉が少なくとも 1 個袋に入った状態に対して，ゲーム T のルールを以下のように定める．

> **ゲーム T**　操作 T を 1 回施し，その結果，白玉が 3 個袋に入っている場合に限り 1 点を得る．

赤玉 3 個と白玉 3 個が袋に入った状態から始めて，ゲーム T を n 回行い終えたとき，1 回目から n 回目までに得た点の合計を X_n とし，$Y_n=2^{X_N}$ と定める．このとき，Y_n の期待値は $\boxed{（そ）}$ であり，分散は

$$\boxed{（た）}2^{n-1}+\boxed{（ち）}n^2+\boxed{（つ）}n+\boxed{（て）}$$

(4) $X_n=n$ となる確率は a_n であり　X_n が $n-1$ になる確率は $a_{n-1}\times\underline{\frac{1}{2}}$

n回目に白玉引く確率

よって $E[Y_n]=\sum_{k=0}^{n-1}2^k\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+1$

$$\underline{=\frac{1}{2}(n+2)}\ //$$

$$E[Y_n^2]=\sum_{k=0}^{n-1}2^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}+2^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}2^{k-1}+2^n$$

$$=3\cdot2^{n-1}-\frac{1}{2}$$

分散は $E[Y_n^2]-E[Y_n]^2=\underline{3\cdot2^{n-1}-\frac{1}{4}n^2-n-\frac{3}{2}}\ //$

公式LINE
ゴウカライズVET HP
医学部受験ならゴウカライズメディカル
公式 LINE（こちら）で無料相談受付中！
公式 𝕏（@goukalize）では解答速報公開中！

3

以下の設問 (1) (ii) に答え，文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．以下，すべての多項式は，実数を係数とする x についての多項式であるとする．

(1) (i) 3 次式 $P(x)=3x^3-9x^2+7x$ と 2 次式 $Q(x)=2x^2+1$ について，合成関数 $P(Q(x))$ は多項式 $\boxed{(あ)}$ で表される．

(ii) 多項式の積の展開より，2 つの多項式 $G(x)=a_mx^m+\cdots+a_1x+a_0$ と $H(x)=b_nx^n+\cdots+b_1x+b_0$ の合成関数 $G(H(x))$ は多項式で表される．n が自然数であって $b_n\neq 0$ であるとき，$G(H(x))=0$ が x についての恒等式ならば，$a_m=\cdots=a_0=0$ となることを示しなさい．

(2) $f(x)$ を 0 でない多項式とし，

$$g(x)=\int_0^x f(t)dt,\quad h(x)=\int_x^1 f(t)dt$$

と定める．さらに，$g(1)$ を a と表し，以下の 2 条件が成り立つとする．

- ある定数 b,c,d が存在して，x についての恒等式

$$g(h(x))-\left[\{h(x)\}^3+b\{g(x)\}^2+ch(x)+d\right]=0$$

が成り立つ．

- 等式 $f(1)=2(1-a)$ が成り立つ．

以下において (う)，(き)，(く)，(せ) には数を入れ，他の空欄は a を用いて表しなさい．

(i) $g(x)+h(x)=\boxed{(い)}$ であり，(1)(ii) を用いると，$g(x)$ は $\boxed{(う)}$ 次式であり，$b=\boxed{(え)}$，$c=\boxed{(お)}$，$d=\boxed{(か)}$ であることがわかる．

(i) $(2x^2+1)\{3(2x^2+1)^2-9(2x^2+1)+7\}$

$=(2x^2+1)(12x^4-6x^2+1)$

$=24x^6-4x^2+1$ //

(ii)

$H(x)$ は様々な異なる実数値をとる。

$p_1\cdots p_{m+1}$ をとるとすると，

$G(x)=A(x-p_1)(x-p_2)\cdots(x-p_m)$ とかける

$G(p_{m+1})=0$ より $A=0$．$G(x)$ は常に 0 となるので，$a_m=a_{m-1}\cdots=a_0=0$

(i) $g(x)+h(x)=\int_0^1 f(t)dt=g(1)=a$ //

$h(x)=a-g(x)$ を代入して，

$g(h(x))-\{(h(x))^3+b(h(x))^2+(-2ab+c)h(x)+a^2b+d\}=0$

(1)(ii) より $g(x)$ は 3 次以上の多項式かつ 4 次以上の係数は 0

∴ 3 次式 //

このとき $g(x)=x^3+bx^2+(-2ab+c)x+a^2b+d$ となり，

$g'(x)=3x^2+2bx-2ab+c$

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$ より $g'(x)=f(x)$

公式LINE
ゴウカライズVET HP
医学部受験ならゴウカライズメディカル
公式 LINE（こちら）で無料相談受付中！
公式 𝕏（@goukalize）では解答速報公開中！

$$\begin{cases} g(1) = 1+b+(-2ab+c)+a^2b+d=0 \\ g(0) = a^2b+d=0 \\ g'(1) = 3+2b+(-2ab+c)=0 \end{cases}$$

これを解くと. $b=-3a \quad c=-6a^2+4a-1 \quad d=3a^3$ //

(ii) 関数 $g(x)$ が極値をもつための必要十分条件は $a <$ (き) または $a >$ (く) である．a がこの条件を満たすとき，$g(x)$ は $x =$ (け) で極大値 M をとる．また，方程式 $g(x) = M$ の解は $x =$ (こ) と $x =$ (さ) である．

(ii)

$g(x)$が極値をもつということは、$g'(x)=0$が異なる2つの実数解をもつということなので

$3x^2+2bx-2ab+c=0$ の判別式をDとすると、

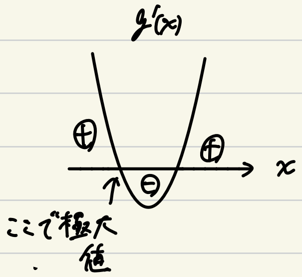
$$D=4b^2+24ab-12c$$
$$=4(b^2+6ab-3c)$$
$$=4(9a^2-12a+3)$$
$$=12(3a-1)(a-1)>0.$$

$a<\frac{1}{3} \quad a>1$ //

$g'(x)=3x^2-6ax+4a-1$

$g'(x)=0$ の小さい方の解は

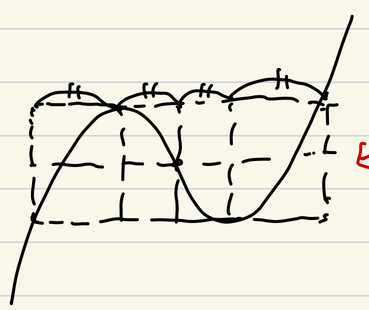
$$\frac{3a-\sqrt{9a^2-12a+3}}{3}$$ //



右図に示した3次関数の性質を利用すると

求める答えは、

$$\frac{3a+\sqrt{9a^2-12a+3}}{3}+\frac{\sqrt{9a^2-12a+3}}{3}$$
$$=\frac{3a+2\sqrt{9a^2-12a+3}}{3}$$ //



知っておくとラクできる!

公式LINE
ゴウカライズVET HP
医学部受験ならゴウカライズメディカル
公式 LINE（こちら）で無料相談受付中！
公式 𝕏（@goukalize）では解答速報公開中！

(iii) 曲線 $y=g(x)$ 上の点 $(a, g(a))$ における接線の方程式は，

$$y = \boxed{(し)}\,x + \boxed{(す)}$$

である．さらに，

$$F(a)=\int_0^a \left\{g(x) - \boxed{(さ)}\,x - \boxed{(し)} - 2(x-a)\right\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}}dx$$

と定める．ただし，e は自然対数の底である．このとき，$F(a) = \boxed{(す)}$ と表され，a の関数 $F(a)$ の最大値は $\boxed{(せ)}$ である．

$g'(a) = -3a^2+4a-1$ より

$y = (-3a^2+4a-1)x + a^3$ //

$$F(a) = \int_0^a \{g(x) - (-3a^2+4a-1)x - a^3 - 2(x-a)\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx$$

$$= \int_0^a \{x^3 - 3ax^2 + \cancel{(4a-1)x} + 3a^2x - \cancel{(4a-1)x} - a^3 - 2(x-a)\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx$$

$$= \int_0^a \{(x-a)^3 - 2(x-a)\} e^{-\frac{(x-a)^2}{2}} dx$$

$t = x-a$ と置換すると

$$\int_{-a}^0 (t^3-2t) e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

$-\frac{t^2}{2} = u$ と置換すると. $\frac{du}{dt} = -t$

$$\int_{-\frac{a^2}{2}}^0 (2u+2) e^u du$$

$$= \Big[2ue^u\Big]_{-\frac{a^2}{2}}^0 = a^2 e^{-\frac{a^2}{2}}$$ //

$F'(a) = -a(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2}) e^{-\frac{a^2}{2}}$ より最大値は

$F(\pm\sqrt{2}) = \frac{2}{e}$ //

F(a)の概形

公式LINE
ゴウカライズVET HP
医学部受験ならゴウカライズメディカル
公式 LINE（こちら）で無料相談受付中！
公式 𝕏（@goukalize）では解答速報公開中！

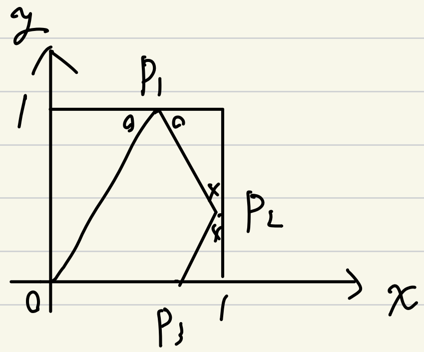
$\boxed{4}$

以下の文章の空欄に適切な数または式を入れて文章を完成させなさい．

(1) 座標平面において，連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1$ の表す正方形 S を考える．正方形 S の辺上の異なる 5 点

$$P_0(0,0),\ P_1(p_1,1),\ P_2(1,q_2),\ P_3(p,0),\ P_4(p_4,q_4)$$

は次の条件を満たすとする．$i=1,2,3$ に対して，点 P_i は正方形 S の頂点でなく，点 P_i を通る正方形 S の辺を線分 $\mathrm{A}_i\mathrm{B}_i$ と表すとき，$\angle P_{i-1}P_iP_{i+1}$ が成り立つ．ただし，$0^\circ < \angle P_{i-1}P_iA_i = \angle P_{i+1}P_iB_i$ が成り立つ．ただし，$0 < \angle P_{i-1}P_iA_i < 90^\circ$ とする．このとき，$p_1 =$ $\boxed{(あ)}$，$q_2 =$ $\boxed{(い)}$ である．さらに，$0 < p \leqq$ $\boxed{(う)}$ のとき $(p_4,q_4)=(0,$ $\boxed{(え)}$$)$ であり，$\boxed{(う)}$ $\leqq p < 1$ のとき $(p_4,q_4)=($$\boxed{(お)}$$,1)$ である．ただし，$\boxed{(う)}$ には数を入れ，それ以外の上記の空欄は p を用いて表しなさい．



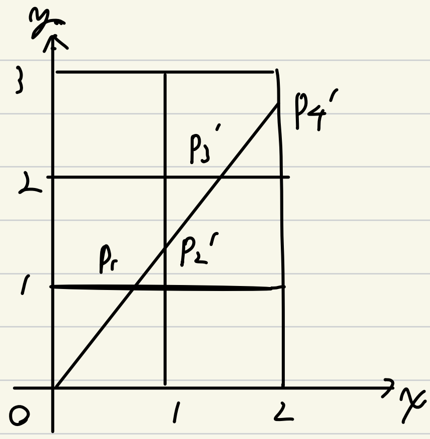
$$\left\{\begin{array}{ll} 1 : p_1 = 1 - q_2 : 1 - p_1 & \cdots ① \\ 1 : p_1 = q_2 : 1 - p & \cdots ② \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} p_1 - p_1 q_2 = 1 - p_1 & \cdots ①' \\ p_1 q_2 = 1 - p & \cdots ②' \end{array}\right.$$

②′を①′に代入して

$p_1 - 1 + p = 1 - p_1$　　$2p_1 = 2 - p$　　$\underline{p_1 = \dfrac{2-p}{2}}_{\,/\!/}$　　$\underline{q_2 = \dfrac{2-2p}{2-p}}_{\,/\!/}$

公式LINE
ゴウカライズVET HP
医学部受験ならゴウカライズメディカル
公式 LINE（こちら）で無料相談受付中！
公式 𝕏（@goukalize）では解答速報公開中！



反射したところで折り返して考えると、
傾きは $\dfrac{2}{2-p}$ となるので

$$\frac{2}{2-p} \leqq \frac{3}{2}$$

$$p \leqq \frac{2}{3}$$

$P_2' = \left(1, \dfrac{2}{2-p}\right)$ なので $P_4' = \left(2, \dfrac{4}{2-p}\right)$

$$q_4 = q_4' - 2 = \frac{2p}{2-p}$$

$\dfrac{2}{3} \leqq p < 1$ のとき $P_1 = \left(\dfrac{2-p}{2}, 1\right)$ なので $P_4' = \left(\dfrac{6-3p}{2}, 3\right)$

$$p_4 = 2 - \frac{6-3p}{2}$$

$$= \frac{3p-2}{2}$$

(2) 座標空間において，連立不等式 $0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ 0 \leqq z \leqq 1$ の表す立方体 T を考える．立方体 T の面上の異なる 5 点

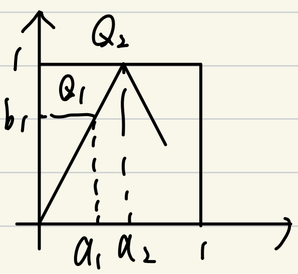
$$Q_0(0,0,0),\ Q_1(a_1,b_1,1),\ Q_2(a_2,1,c_2),\ Q_3(a,b,0),\ Q_4(a_4,b_4,c_4)$$

は次の条件を満たすとする．$i=1,2,3$ に対して，点 Q_i は立方体 T の頂点ではなく，T の辺上にもない．さらに，点 Q_i を含む立方体 T の面は，3 点 $\mathrm{Q}_{i-1}, \mathrm{Q}_i, \mathrm{Q}_{i+1}$ の定める平面と直交し，この 2 つの面が共有する線分を $\mathrm{C}_i\mathrm{D}_i$ と表すとき，$\angle Q_{i-1}Q_iC_i = \angle Q_{i+1}Q_iD_i$ が成り立つ．ただし，$0^\circ < \angle Q_{i-1}Q_iC_i < 90^\circ$ とする．

(i) 2 点 $(0,0,0), (a_1,b_1,0)$ を通る直線と平面 $y=1$ の交点の座標は a_1, b_1 を用いて $(\boxed{(か)},1,0)$ と表されるので，$a_2 = \boxed{(か)}$ である．

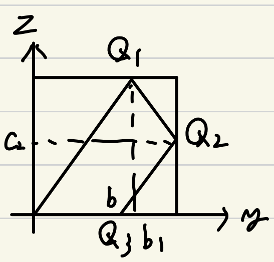
(ii) a, b, を用いて $a_1 = (\boxed{(き)})$, $b_1 = (\boxed{く})$, $a_2 = \boxed{(け)}$, $c_2 = \boxed{(こ)}$ と表される．さらに，$a_4=1$, $b_4=0$ となるための必要十分条件は，$\boxed{(さ)} \leqq a < 1$ かつ $b = \boxed{(し)}$ となることであって，この条件が成り立つならば，$c_4 = \boxed{(す)}$ である．また，$0 < a \leqq \boxed{(さ)}$ かつ $\boxed{(さ)} \leqq b < 1$ であるとき，$(a_4,b_4,c_4) = (\boxed{(せ)}, \boxed{(そ)}, 1)$ である．ただし，(さ) には数を入れ，(し), (す) は a を用いて，(せ)，(そ) は a, b を用いて表しなさい．

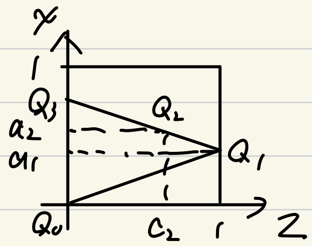
$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{(か)}{1}$ となるため、$\underline{\dfrac{a_1}{b_1}}$ //



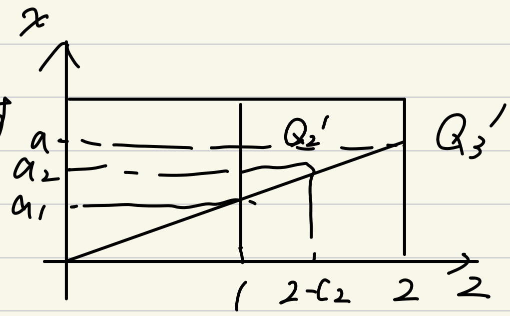
Q_1, Q_2 を xz 平面に投影すると。
図のようになり
$a_2 = \dfrac{a_1}{b_1}$ //

立体図形は平面に投影！



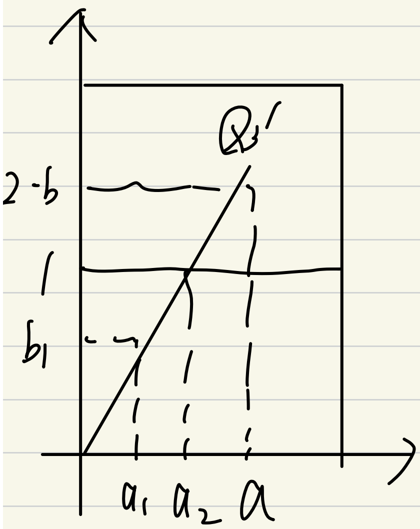


折り返す
⇒



$\dfrac{a_1}{1} = \dfrac{a}{2}$ より　$a_1 = \dfrac{a}{2}$ //

公式LINE
ゴウカライズVET HP
医学部受験ならゴウカライズメディカル
公式 LINE（こちら）で無料相談受付中！
公式 𝕏（@goukalize）では解答速報公開中！

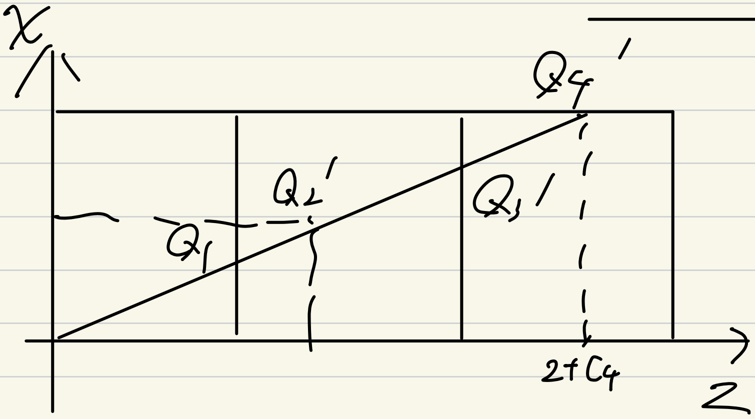


$\dfrac{a_1}{b_1} = \dfrac{a}{2-b} = a_2$ より,

$b_1 = \dfrac{2-b}{2}$ //　　$a_2 = \dfrac{a}{2-b}$ //

また, $a_1 = \dfrac{a_2}{2-c_2}$ より

$c_2 = \dfrac{2-2b}{2-b}$ //



$a_4=1$, $b_4=0$ のとき　$a_2=\dfrac{1}{2}$　よって　$b=2-2a$ //

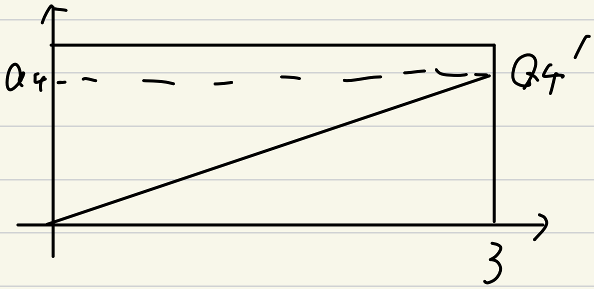
(1)と同様に直線の傾きを考えると,

$\dfrac{1}{3} \leqq a_1 < \dfrac{1}{2}$　より　$\dfrac{2}{3} \leqq a < 1$ //

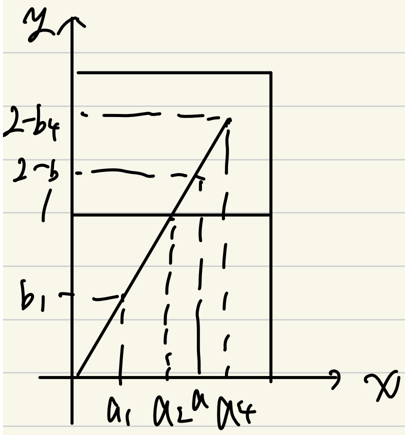
$a_1 = \dfrac{1}{2+c_4}$　より　$c_4 = \dfrac{2}{a} - 2$ //

公式LINE
ゴウカライズVET HP
医学部受験ならゴウカライズメディカル
公式 LINE (こちら) で無料相談受付中！
公式 𝕏 (@goukalize) では解答速報公開中！

$0 < a \leqq \frac{2}{3}$ の場合.



$\frac{a_4}{3} = \frac{a}{2}$ $\quad a_4 = \frac{3}{2}a$



$$\frac{a_4}{2-b_4} = \frac{a}{2-b}$$

よって $b_4 = \frac{3}{2}b - 1$

$$(a_4, b_4, c_4) = \left(\frac{3}{2}a, \frac{3}{2}b - 1, 1\right)$$

公式LINE
ゴウカライズVET HP
医学部受験ならゴウカライズメディカル
公式 LINE (こちら) で無料相談受付中！
公式 𝕏 (@goukalize) では解答速報公開中！