ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

大阪医科薬科大学

医学部 前期一般

(2025/02/10)

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

1

次の問いに答えよ。

(1) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cos\left(\frac{k^2\pi}{2n^2}\right)$$

(2)

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}2k\sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right)\quad(n=1,2,3,\ldots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。p を 2 以上の整数とするとき、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^p}$$

を求めよ。

2

xyz 空間において、原点を通り、ベクトル $\vec{m}=(-6,2,5)$ に平行な直線 l があり、また、点 $\mathrm{A}(-10,0,14)$, $\mathrm{B}(8,-1,-3)$ がある。次の問いに答えよ。

(1) 点 A から直線 l に垂線をおろし、l との交点を C、同様に点 B から直線 l に垂線をおろし、l との交点を D とする。C と D の座標を求めよ。また、ベクトルの大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$ を求めよ。

(2) 4 点 $\mathrm{A,B,C,D}$ は同一平面上にないことを示せ。

(3) l 上に動点 P があるとき、線分の長さの和 $\mathrm{AP}+\mathrm{BP}$ の最小値と、そのときの点 P の座標を求めよ。

3

原点を O とする xy 平面において、曲線 $C: y=x^2-x+2$ と直線 $L: y=2x$ で囲まれた図形を S とする。図形 S の境界に含まれる C 上の各点を P として、各点 P から L に垂線をおろし、垂線と L との交点を H とする。線分 PH, 線分 OH の長さをそれぞれ r, h とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P の x 座標を t とするとき、r および h をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) 図形 S を直線 L の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

4

(1) n を正の整数とする。二項係数に関する等式

$$ {}_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} = \frac{{}_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1} $$

が成り立つことを示せ。

(2) コインを 1 枚投げる。投げたときの表裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である。表が出れば得点は 1 点とし、裏が出れば得点は -1 点とする。この試行を 12 回繰り返す。1 回目から k 回目までの合計得点を S_k 点とする。ただし、S_1 点は 1 回目の得点である。次の問いに答えよ。

(i) $S_{12} = 0$ となる確率を求めよ。

(ii) $S_{12} = 0$ であったとき、$S_1, S_2, \ldots, S_{11}$ がすべて負である確率を求めよ。

1

次の問いに答えよ。

(1) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cos\left(\frac{k^2\pi}{2n^2}\right)$$

(2)

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}2k\sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right)\quad(n=1,2,3,\dots)$$

で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。p を 2 以上の整数とするとき、

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n^p}$$

を求めよ。

1

(1) 区分求積法のような形なので...

形をととのえる.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\cos\left(\frac{k^2\pi}{2n^2}\right)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\cos\left(\frac{\pi}{2}\left(\frac{k}{n}\right)^2\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^1 x\cos\left(\frac{\pi}{2}x^2\right)dx$$

$\frac{\pi}{2}x^2=t$ ∴ $\pi x\,dx=dt$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}\cos t\,dt=\frac{1}{\pi}$$

区分求積の形にする.

(2)
$$\frac{a_p}{n^p}=\frac{1}{n^p}\sum_{k=1}^{n}2k\sin\left(\frac{2k}{n}\pi\right)=\frac{1}{n^{p-2}}\cdot\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2\cdot\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)}$$

pの値で変化　恐らく有限 → pの値で場合分け!

(i) $p=2$ のとき

$$(与式)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2\cdot\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^1 2x\sin(2\pi x)\,dx=\left[-\frac{x}{\pi}\cos(2\pi x)+\frac{1}{2\pi^2}\sin(2\pi x)\right]_0^1$$

$$=-\frac{1}{\pi}$$

(ii) $p\geqq 3$ のとき

$$(与式)=\frac{1}{n^{p-2}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}2\cdot\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}0\cdot\left(-\frac{1}{\pi}\right)=0$$

$\boxed{2}$

xyz 空間において、原点を通り、ベクトル $\vec{m} = (-6, 2, 5)$ に平行な直線 l があり、また、点 $\mathrm{A}(-10, 0, 14)$, $\mathrm{B}(8, -1, -3)$ がある。次の問いに答えよ。

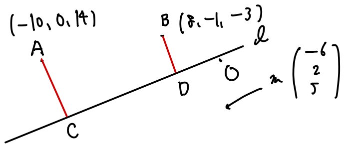
(1) 点 A から直線 l に垂線をおろし、l との交点を C、同様に点 B から直線 l に垂線をおろし、l との交点を D とする。C と D の座標を求めよ。また、ベクトルの大きさ $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$ を求めよ。

(2) 4 点 A, B, C, D は同一平面上にないことを示せ。

(3) l 上に動点 P があるとき、線分の長さの和 AP + BP の最小値と、そのときの点 P の座標を求めよ。

$\boxed{2}$

(1)



まず、C, D は ℓ 上にあるので $\overrightarrow{OC} = \alpha\vec{m}$, $\overrightarrow{OD} = \beta\vec{m}$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$ と表すことができる。

また、$\begin{cases} \vec{m} \perp \overrightarrow{AC} \\ \vec{m} \perp \overrightarrow{BD} \end{cases}$ $\therefore \begin{cases} \vec{m}\cdot(\alpha\vec{m} - \overrightarrow{OA}) = 0 & \text{—①} \\ \vec{m}\cdot(\beta\vec{m} - \overrightarrow{OB}) = 0 & \text{—②} \end{cases}$

①のとき、

$$\alpha|\vec{m}|^2 - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore \alpha(36+4+25) - 130 = 0 \qquad \therefore \alpha = 2$$

よって $\overrightarrow{OC} = 2\vec{m}$ より、 $C(-12, 4, 10)$ $\overrightarrow{AC} = (-2, 4, -4)$ より $|\overrightarrow{AC}| = 6$

②のとき、

$$\beta|\vec{m}|^2 - \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \therefore 65\beta + 65 = 0 \qquad \therefore \beta = -1$$

よって $\overrightarrow{OD} = -\vec{m}$ より、 $D(6, -2, -5)$ $\overrightarrow{BD} = (-2, -1, -2)$ より、 $|\overrightarrow{BD}| = 3$

(2) 同一平面上にある → $\overrightarrow{AD} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$ なる p, q が存在する。

4点が同一平面上にあると仮定すると、

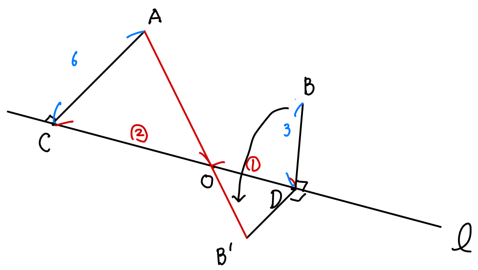
$\overrightarrow{AD} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$

$$\therefore \begin{cases} 16 = 18p - 2q \\ -2 = -p + 4q \\ -19 = -17 - 4q \end{cases} \iff \begin{cases} p = \frac{6}{7} & \text{—③} \\ q = -\frac{2}{7} & \text{—④} \\ -19 = -17p - 4q & \text{—⑤} \end{cases}$$

ここで③④は⑤をみたさないので、これらをみたす p, q は存在せず、矛盾。

よって A, B, C, D は同一平面上にない ▨

(3) 平面のときの最短キョリの考え方を応用させる。



Bが平面ACD上にあるようにうまく辺を回転すると、上図のようになり、B'とする。

ここで OC : OD = 2 : 1 = AC : B'D は (1) でわかるので、

AP + BP = AP + B'P ≧ AB' で AB' は O を通り、 $AB' = 3OB' = 3OB = 3\sqrt{64+1+9} = 3\sqrt{74}$

またこのとき $P(0, 0, 0)$

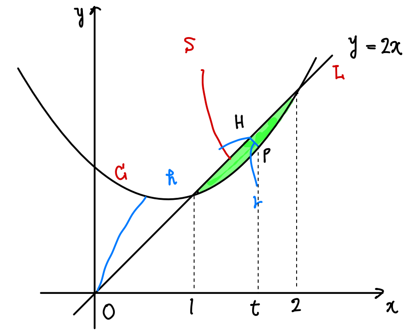
$\boxed{3}$

原点を O とする xy 平面において、曲線 $C : y = x^2 - x + 2$ と直線 $L : y = 2x$ で囲まれた図形を S とする。図形 S の境界に含まれる C 上の各点を P として、各点 P から L に垂線をおろし、垂線と L との交点を H とする。線分 PH, 線分 OH の長さをそれぞれ r, h とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P の x 座標を t とするとき、r および h をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) 図形 S を直線 L の周りに 1 回転させてできる立体の体積 V を求めよ。

$\boxed{3}$



(1) まず、C と L は方程式をとくことにより (1, 2) と (2, 4) で交わることがわかる。
ここで、P(t, t^2 − t + 2) であり、
PH = (P と 2x − y = 0 の キョリ) より、

$$r = \frac{|2t - (t^2 - t + 2)|}{\sqrt{2^2+1}} = \frac{|-t^2+3t-2|}{\sqrt{5}}$$

$$= \frac{-t^2+3t-2}{\sqrt{5}} \quad /\!/$$

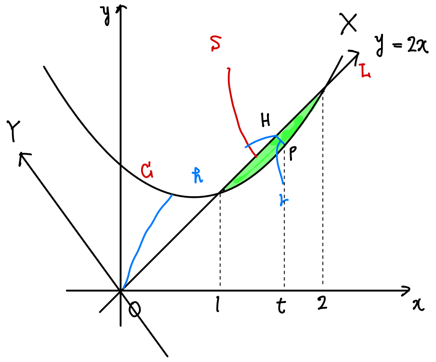
(1) また直線 PH の方程式は、PH ⊥ L より傾き $-\frac{1}{2}$ に注目すると、

$$y = -\frac{1}{2}(x-t) + (t^2 - t + 2) = -\frac{1}{2}x + t^2 - \frac{1}{2}t + 2 \text{ より、}$$

PH と L の交点が H より、O と PH とのキョリ が h であることより、

$$h = \frac{|t^2 - \frac{1}{2}t + 2|}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{2}\right)^2}} = \frac{2t^2 - t + 4}{\sqrt{5}} \quad /\!/$$

(2) L を積分軸にとる。図のように XY 座標をとる。このとき求める V は



$$V = \int_{h|_{t=1}}^{h|_{t=2}} \pi r^2 \cdot dh \quad -(*)$$

また (1) より

$$\begin{cases} r = \dfrac{-t^2+3t-2}{\sqrt{5}} \\ h = \dfrac{2t^2-t+4}{\sqrt{5}} \end{cases} \quad -①$$

より、① と (*) をあわせて、

$$V = \int_1^2 \pi \cdot \left\{ \frac{-(t-1)(t-2)}{\sqrt{5}} \right\}^2 \cdot \frac{4t-1}{\sqrt{5}}\, dt$$

$$= \frac{\pi}{5\sqrt{5}} \int_1^2 (t-1)^2(t-2)^2(4t-1)\, dt$$

$$= \frac{\pi}{5\sqrt{5}} \int_1^2 (t-1)^2(t-2)^2 \{4(t-1)+3\}\, dt$$

$$= \frac{\pi}{5\sqrt{5}} \left\{ 4\int_1^2 (t-1)^3(t-2)^2 dt + 3\int_1^2 (t-1)^2(t-2)^2 dt \right\}$$

$$= \frac{\pi}{5\sqrt{5}} \left\{ 4 \cdot \frac{3! \cdot 2!}{6!} \cdot 1^6 + 3 \cdot \frac{2! \cdot 2!}{5!} 1^5 \right\}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{150}\pi \quad /\!/$$

$\boxed{4}$

(1) n を正の整数とする。二項係数に関する等式

$$_{2n}\mathrm{C}_n - {}_{2n}\mathrm{C}_{n-1} = \frac{_{2n}\mathrm{C}_n}{n+1}$$

が成り立つことを示せ。

(2) コインを 1 枚投げる。投げたときの表裏の出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ である。表が出れば得点は 1 点とし、裏が出れば得点は -1 点とする。この試行を 12 回繰り返す。1 回目から k 回目までの合計得点を S_k 点とする。ただし、S_1 点は 1 回目の得点である。次の問いに答えよ。

(i) $S_{12}=0$ となる確率を求めよ。

(ii) $S_{12}=0$ であったとき、$S_1, S_2, \ldots, S_{11}$ がすべて負である確率を求めよ。

$\boxed{4}$

(1) $_{2n}C_n\left(1-\frac{1}{n+1}\right) = \frac{(2n)!}{(n!)(n!)}\cdot\frac{n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = {}_{2n}C_{n-1}$

$\therefore\ {}_{2n}C_n - {}_{2n}C_{n-1} = \frac{_{2n}C_n}{n+1}$ ■

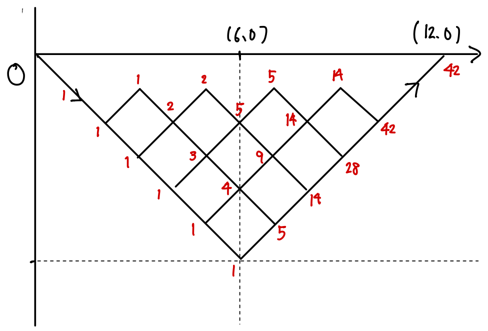
(2)

(i) $S_{12}=0$ となるとき、表は 6 回でて、裏か 6 回でるときより、

$_{12}C_6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{12\cdot 11\cdot \cancel{10}\cdot\cancel{9}\cdot\cancel{8}\cdot 7}{\cancel{6}\cdot\cancel{5}\cdot\cancel{4}\cdot\cancel{3}\cdot\cancel{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 7}{2^{12}} = \frac{231}{1024}$ //

(ii) 経路の考え方を応用する。
条件は、以下のような経路において、(0,0) から (12,0) まで移動するときの最短経路の数に等しいので

↗ か 表
↘ か 裏 を出すことに対応する。



求める確率は $S_{12}=0$ の下で $S_1, S_2, \cdots S_{11}$ か負になる確率なので $\dfrac{\frac{42}{2048}}{\frac{231}{1024}} = \frac{42}{462} = \frac{1}{22}$ //