ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

東京慈恵会医科大学
医学部医学科

2025年2月11日

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

1

次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ．

1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，k 回目に出る目を X_k $(k=1,2,3)$ とする．このとき，

- 積 $X_1X_2X_3$ が 10 の倍数になる確率は $\boxed{ア}$，
- 和 X_1+X_2, X_2+X_3, X_3+X_1 が，いずれも 6 の倍数にならない確率は $\boxed{イ}$

である．

2

次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 3 以上の自然数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{2\log(n+1)} \leqq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)}dx \leqq \frac{1}{2\log n}$$

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ．

(3) $m \geqq n$ をみたす 3 以上の自然数 m, n について，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(m+1)} \leqq \sum_{k=n}^{m} \frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log m}$$

3

自然数 p は 2 以上の定数とする．xy 平面上で不等式 $x^2 - py^2 \geqq -1$ の表す領域を D とする．自然数 r は，円 $(x-p)^2 + y^2 = r$ が領域 D に含まれるような最大のものとするとき，次の問いに答えよ．

(1) r を p を用いて表せ．

(2) (1) のもとで，関係式 $(x-p)^2 + y^2 = r$ をみたす互いに異なる素数の組 (x, y, p) のうち，p の値が最小となるものを求めよ．

4

z は実数でない複素数で，$z + \dfrac{1}{z-1}$ が正の実数となるものとする．このとき，$\left|\dfrac{1}{z-1} - \dfrac{z-\bar{z}}{2} + 1\right|$ がとり得る値の範囲を求めよ．ただし，$\bar{z}$ は z の共役複素数を表す．

$\boxed{1}$

次の $\boxed{}$ にあてはまる適切な数値を解答欄に記入せよ．

1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，k 回目に出る目を X_k $(k=1,2,3)$ とする．このとき，

- 積 $X_1X_2X_3$ が 10 の倍数になる確率は $\boxed{ア}$，
- 和 X_1+X_2, X_2+X_3, X_3+X_1 が，いずれも 6 の倍数にならない確率は $\boxed{イ}$

である．

$\boxed{1}$

(前半) $X_1X_2X_3$ が 10 の倍数となるとき、「5が少なくとも1回でる」かつ「偶数が少なくとも1回でる」ときより、
余事象は「5の倍数が1回もでない」または「全て奇数がでる」ときである。

$\underbrace{\text{「5の倍数が1回もでない」}}_{\text{事象 A}}$　$\underbrace{\text{「全て奇数がでる」}}_{\text{事象 B}}$

よって $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ を求める。

① $P(A)=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216}$ ← 5以外の5つ

② $P(B)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ ← 1, 3, 5

③ $P(A\cap B)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$ ← 1, 3　より $P(A\cup B)=\frac{125}{216}+\frac{1}{8}-\frac{1}{27}=\frac{144}{216}=\frac{2}{3}$

よて求めたい確率は $1-P(A\cup B)$ より、$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ //

(後半)

最初に X_1, X_2 を自由に決めると、$X_1+X_2\equiv 0 \pmod 6$ を避ければよく、この組みあわせは 6 組あるので、
この決め方は、$6^2-6=30$ 通り

次に X_3 を決めるが、考える条件は、

$$\begin{cases} X_1+X_3\not\equiv 0 \pmod 6 \\ X_3+X_2\not\equiv 0 \pmod 6 \end{cases} \quad -(*)$$ である。

たとえば $X_1=X_2=2$ のとき
$X_3=1, 2, 3, 5, 6$

① $X_1=X_2$ のとき、(3, 3) (6, 6) 以外の4パターンあり、このとき X_3 はそれぞれ5つ数字をえらべるので
$4\times 5=20$ 通り

② $X_1\neq X_2$ のとき　$30-4=26$ 通りあり　このとき、X_3 はそれぞれ4つ数字をえらべるので、
$26\times 4=104$ 通り。

よて求める確率は、$\frac{20+104}{6^3}=\frac{124}{216}=\frac{31}{54}$ //

$\boxed{2}$

次の問いに答えよ．ただし，対数は自然対数とする．

(1) 3 以上の自然数 n について，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{2\log(n+1)} \leqq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)}dx \leqq \frac{1}{2\log n}$$

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ．

(3) $m \geqq n$ をみたす 3 以上の自然数 m, n について，次の不等式が成り立つことを示せ．

$$\frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(m+1)} \leqq \sum_{k=n}^{m} \frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log m}$$

(1) $\log(x+n)$ は 区間 $[0, 1]$ で 増加関数より、$0 \leqq x \leqq 1$ のとき、

$(0<) \log n \leqq \log(x+n) \leqq \log(n+1)$

$$\therefore \frac{1}{\log(n+1)} \leqq \frac{1}{\log(x+n)} \leqq \frac{1}{\log n}$$

$$\therefore \frac{x}{\log(n+1)} \leqq \frac{x}{\log(x+n)} \leqq \frac{x}{\log n} \quad (\because x \geqq 0)$$

$$\therefore \int_0^1 \frac{x}{\log(n+1)}dx = \frac{1}{2\log(n+1)} \leqq \int_0^1 \frac{x}{\log(x+n)}dx \leqq \int_0^1 \frac{x}{\log n}dx = \frac{1}{2\log n} \quad ■ \quad -(*)$$

(2) $$\int \frac{1}{x(\log x)^2}dx = \int \frac{(\log x)'}{(\log x)^2}dx = -\frac{1}{\log x} + C$$

(3) (*)の $n \to k$ として、の 両辺 $\times \dfrac{2}{k\log k}$ をして

$$\frac{1}{k\log k\log(k+1)} \leqq \frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \frac{1}{k\log k\log k}$$

$$\underbrace{\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k\log k\log(k+1)} \leqq \sum_{k=n}^{m}\frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}}_{(ア)}dx \leqq \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k\log k\log k}$$

$(イ)$: $\displaystyle\sum_{k=n}^{m}\frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k\log k\log k}$

(ア) について、

$$\frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)} = \frac{\log(k+1) - \log k}{\log k\log(k+1)} = \frac{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\log k\cdot\log(k+1)}$$

一般に、$\log(1+y) \leqq y \ (y>0)$ より、

$$\frac{\log\left(1+\frac{1}{k}\right)}{\log k\cdot\log(k+1)} \leqq \frac{1}{k\log k\cdot\log(k+1)} \quad -①$$

(イ) について

$$\frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \frac{2}{k\log k}\cdot\frac{1}{2\log k} = \frac{1}{k(\log k)^2} \text{ であるが、}$$

$f(x) = \dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x \geqq 3$ で 単調減少より、

$$\sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k(\log k)^2} \leqq \int_{n-1}^{m}\frac{1}{x(\log x)^2}dx = \left[-\frac{1}{\log x}\right]_{n-1}^{m} = -\frac{1}{\log m} + \frac{1}{\log(n-1)} \quad -②$$

よって ①②より

$$\sum_{k=n}^{m}\left(\frac{1}{\log k} - \frac{1}{\log(k+1)}\right) \leqq \sum_{k=n}^{m}\frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \sum_{k=n}^{m}\frac{1}{k\log k\log k} \leqq \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log m}$$

和の中抜け

$$\therefore \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(m+1)} \leqq \sum_{k=n}^{m}\frac{2}{k\log k}\int_0^1 \frac{x}{\log(x+k)}dx \leqq \frac{1}{\log(n-1)} - \frac{1}{\log m} \quad ■$$

3

自然数 p は 2 以上の定数とする．xy 平面上で不等式 $x^2 - py^2 \geqq -1$ の表す領域を D とする．自然数 r は，円 $(x-p)^2 + y^2 = r$ が領域 D に含まれるような最大のものとするとき，次の問いに答えよ．

(1) r を p を用いて表せ．

(2) (1) のもとで，関係式 $(x-p)^2 + y^2 = r$ をみたす互いに異なる素数の組 (x, y, p) のうち，p の値が最小となるものを求めよ．

3

(1) $(x-p)^2+y^2=r$ が $x^2-py^2 \geqq -1$ なる領域に含まれるとき、

$(x-p)^2+y^2=r$ をみたす全ての x が $x^2-p\{r-(x-p)^2\}+1 \geqq 0$ をみたすことと等しい。

よって $p-\sqrt{r} \leqq x \leqq p+\sqrt{r}$ なる全ての x で $\underbrace{(1+p)x^2-2p^2x+p^3-pr+1}_{=f(x)\text{とする。}} \geqq 0$ が成立することが条件。

ここで $f(x)$ の軸は $x=\dfrac{p^2}{1+p}=p-1+\dfrac{1}{p+1}$ であり、

$$\begin{cases} p-1+\dfrac{1}{p+1} > p-1 \geqq p-\sqrt{r} \longleftarrow r \geqq 1 \\ p-1+\dfrac{1}{p+1} < p < p+\sqrt{r} \end{cases}$$

より、軸が区間に含まれるため、条件は $f\left(\dfrac{p^2}{p+1}\right) \geqq 0$ である。

$$f\left(\frac{p^2}{p+1}\right)=\frac{p^4}{p+1}-\frac{2p^4}{p+1}+p^3-pr+1 \geqq 0$$

$$\therefore \quad -\frac{p^3}{p+1}+p^2+\frac{1}{p} \geqq r$$

$$\therefore \quad r \leqq p^2+\frac{1}{p}-\frac{(p+1)(p^2-p+1)-1}{p+1}=\cancel{p^2}+\frac{1}{p}-\left(\cancel{p^2}-p+1-\frac{1}{p+1}\right)=p+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-1 \quad -③$$

ここで ③ について、

$$p-1 \leqq p+\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}-1 \leqq p-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=p-\frac{1}{6}<p$$

より、$r=p-1$ のとき r は最大となる。

(2) $(x-p)^2+y^2=p-1$

（実験段階で x, y, p のうち全てが 2 でなかったら、$p-1=$ 偶数、$(x-p)^2=$ 偶数　$y^2=$ 奇数 より両辺の偶奇が一致しないことに気づきたい。）

$x, y, p \geqq 3$ とすると $p-1 \equiv 0 \pmod 2$　$(x-p)^2+y^2 \equiv 0+1 \equiv 1$ より $0 \equiv 1$ となり不適。

よって $\boxed{x, y, p \text{ のいずれかは } 2 \text{ である。}}$

① $p=2$ のとき

$(x-1)^2+y^2=1$ なる (x, y) の組は存在せず不適.

② $x=2$ のとき

$(2-p)^2+y^2=p-1$

$\therefore \quad y^2=-p^2+5p-5 \geqq 9$ （$\because y \geqq 3$）だが、$p^2-5p+14 \leqq 0$ なる $p(\geqq 3)$ は存在せず、不適。

③ $y=2$ のとき（$x \geqq 3$、$p \geqq 3$）

$(x-p)^2+4=p-1$

$\therefore \quad x=p \pm \sqrt{p-5}$ より $x \in \mathbb{N}$ より $p-5$ が平方数である必要があり、このような p を小さい順から考えると、

$p=41 \cdots$ である。

$p=41$ のとき $x=41 \pm \sqrt{36}=41 \pm 6=35, 47$　$x=47$ は適する。

よって $p=41$ が最小で $(x, y, p)=(47, 2, 41)$

$\boxed{4}$

z は実数でない複素数で, $z+\dfrac{1}{z-1}$ が正の実数となるものとする. このとき, $\left|\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{z-\bar{z}}{2}+1\right|$ がとり得る値の範囲を求めよ. ただし, $\bar{z}$ は z の共役複素数を表す.

$\boxed{4}$

$Z = x + yi$ とする ($x, y \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$) と条件より、

$$Z + \frac{1}{Z-1} = x + yi + \frac{1}{(x-1)+yi} = x + yi + \frac{(x-1)-yi}{(x-1)^2+y^2} = x + \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2} + y\left\{1 - \frac{1}{(x-1)^2+y^2}\right\}i = 0$$

なので、

$$\begin{cases} x + \dfrac{x-1}{(x-1)^2+y^2} > 0 \\ 1 - \dfrac{1}{(x-1)^2+y^2} = 0 \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} x(x-1)^2 + xy^2 + x - 1 > 0 & \text{―①} \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 & \text{―②} \end{cases}$$

となる。

ここで ② より、(x, y) は θ ($\in \mathbb{R}$) を用いて $\boxed{x = 1 + \cos\theta,\ y = \sin\theta \text{ と媒介変数表示することができ、}}$

円を表すときはこのようにすると
うまくいきやすい。

① に代入して、

$$(1+\cos\theta)\cos^2\theta + (1+\cos\theta)\sin^2\theta + \cos\theta > 0$$

$$\therefore\ (1+\cos\theta) + \cos\theta > 0$$

$$\therefore\ (1 \geqq)\cos\theta > -\frac{1}{2} \quad \text{―①}'$$ である

この下で

$$\left|\frac{1}{Z-1} - \frac{Z-\bar{Z}}{2} + 1\right| = \left|\frac{1}{\cos\theta + i\sin\theta} - \frac{2\sin\theta\, i}{2} + 1\right| = |\cos\theta - i\sin\theta - i\sin\theta + 1|$$

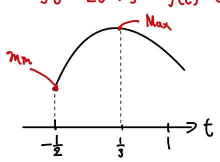
$$= |(1+\cos\theta) - 2i\sin\theta| = \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + 4\sin^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 + 4(1-\cos^2\theta)}$$

$$= \sqrt{-3\cos^2\theta + 2\cos\theta + 5} \quad \text{―}(*)$$

よって ①' の範囲で $(*)$ の範囲を求める。

$\cos\theta = t$ として $-3\cos^2\theta + 2\cos\theta + 5 = -3t^2 + 2t + 5 = f(t)$ とする。

$$f(t) = -3\left(t^2 - \frac{2}{3}t\right) + 5$$
$$= -3\left\{\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right\} + 5$$
$$= -3\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{16}{3}$$ より。



右図より、

$$\frac{13}{4} = f\left(-\frac{1}{2}\right) < f(t) \leqq f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{16}{3}$$

よって (与式) $= \sqrt{f(t)}$ より、

$$\sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2} < \left|\frac{1}{Z-1} - \frac{Z-\bar{Z}}{2} + 1\right| \leqq \frac{4}{\sqrt{3}}$$