1 年利率 1.875 % で 3600 万円を借り入れ，毎年，一定額 x 万円を返済することにした．なお $x>0$ とする．また，自然数 k に対し，k 年後の借り入れ残高を a_k で表すものとし，a_k が $x \leqq 1.01875 \times a_k$ である場合のみ a_{k+1} を考えるものとする．このとき，a_{k+1} は

$$a_{k+1} = 1.01875 \times a_k - x,\ a_1 = 1.01875 \times 3600 - x$$

を満たす．以下の (1), (2) の $\boxed{ア}$, $\boxed{イ}$ にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1) $a_k = a_{k+1}$ を満たすような x の値は $\boxed{ア}$ である．

(2) $a_{20} = 0$ を満たすような x の値は $\boxed{イ}$ である．なお $1.01875^{20} = 1.45$ として計算せよ．

(1)

問題文より 3600万円を借り入れているため、

$a_1 = 3600$ であり、$a_1 = 1.01875 \times 3600 - x$ より

$3600 = 1.01875 \times 3600 - x$

∴ $x = 3600 \times 0.01875 = 67.5$

∴ $x = 67.5$

計算ミスを減らすために....

3600×0.01875

⇓ できるだけ数を小さくしよう!

$36 \times 1.875 = 67.5$

(2) $1.01875 = r$ とすると ← 過程でミスが起こらないように文字で置いて簡単に!!!

すると、$a_{k+1} = 1.01875 \times a_k - x$

∴ $a_{k+1} = r a_k - x$

特性方程式を用いて

$$\begin{array}{rl} & a_{k+1} = r a_k - x \\ -) & \alpha = r\alpha - x \\ \hline & a_{k+1} - \alpha = r(a_k - \alpha) \end{array}$$

∴ $\alpha = \dfrac{x}{r-1}$

∴ $a_{k+1} - \dfrac{x}{r-1} = r^{1}\left(a_k - \dfrac{x}{r-1}\right)$

⇔ $a_{k+1} - \dfrac{x}{r-1} = \left(a_1 - \dfrac{x}{r-1}\right) r^k$　それぞれの＝の和が一緒になるように式をつくろう!!

⇓ 1つ項をそれぞれ下げて

⇔ $a_k = \left(a_1 - \dfrac{x}{r-1}\right) r^{k-1} + \dfrac{x}{r-1}$

$a_{20} = 0$ のとき (20年で返済完了)

$a_{20} = \left(a_1 - \dfrac{x}{r-1}\right) r^{19} + \dfrac{x}{r-1} = 0$

⇔ $\left(3600r - x - \dfrac{x}{r-1}\right) r^{19} + \dfrac{x}{r-1} = 0$

↑の式に $1.01875^{20} = 1.45$ を使いたい!

つまり r^{19} をどうにかして r^{20} に変換したい!!

⇓

⇔ $3600r^{20} - r^{19}x - \dfrac{r^{19}}{r-1}x + \dfrac{1}{r-1}x = 0$

↓ x を求めたいので x について整理すると

⇔ $x\left(r^{19} + \dfrac{r^{19}-1}{r-1}\right) = 3600r^{20}$

ポイント!!

$\dfrac{r^{19}-1}{r-1} = 1 + r + r^2 + \cdots + r^{18}$ と変形できる。

⇔ $x(1 + r + r^2 + \cdots + r^{18} + r^{19}) = 3600r^{20}$

⇓ 数列の和の形に

⇔ $\dfrac{r^{20}-1}{r-1} = 3600r^{20}$

⇔ $x = 3600r^{20} \times \dfrac{r-1}{r^{20}-1} = 3600 \times 1.45 \times \dfrac{0.01875}{0.45} = 217.5$

2 座標平面において，$x = 4\sqrt{3}\sin\theta(1-\cos\theta)$，$y = 4\sqrt{3}(2+\cos\theta-\cos^2\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ と媒介変数表示される曲線を C とする．

以下の (1) ～ (3) の $\boxed{\text{ウ}}$ ～ $\boxed{\text{サ}}$ にあてはまる適切な数を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1) x の値域を求めると $\boxed{\text{ウ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{エ}}$ となる．また，

$$\frac{dx}{d\theta} = -\boxed{\text{オ}}\cos 2\theta + \boxed{\text{カ}}\cos\theta$$

となる．

(2) y の値域を求めると $\boxed{\text{キ}} \leqq y \leqq \boxed{\text{ク}}$ となる．また，

$$\frac{dy}{d\theta} = \boxed{\text{ケ}}\sin 2\theta - \boxed{\text{コ}}\sin\theta$$

となる．

(3) 曲線 C の長さを求めると $\boxed{\text{サ}}$ である．

(1)

$x = 4\sqrt{3}\sin\theta(1-\cos\theta)$ $(0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$

$= 4\sqrt{3}\sin\theta - 4\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta$

⇓ 微分しやすくするために積の形を変形しよう！
（今回は2倍角）

$= 4\sqrt{3}\sin\theta - 2\sqrt{3}\sin 2\theta$

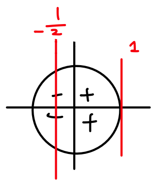
$\dfrac{dx}{d\theta} = -4\sqrt{3}\cos 2\theta + 4\sqrt{3}\cos\theta$ //

$\dfrac{dx}{d\theta} = 0$ より、$-4\sqrt{3}\cos 2\theta + 4\sqrt{3}\cos\theta = 0$

2倍角

$\Leftrightarrow -4\sqrt{3}(2\cos^2\theta - 1) + 4\sqrt{3}\cos\theta = 0$

$\Leftrightarrow -4\sqrt{3}(\cos\theta - 1)(2\cos\theta + 1) = 0$



よって増減表は

θ	0	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	$\frac{4}{3}\pi$	…	2π
$\frac{dx}{d\theta}$	0	+	0	−	0	+	0
x	0	↗	9	↘	−9	↗	0

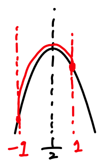
$\therefore\ -9 \leqq x \leqq 9$ //

$y = -4\sqrt{3}(\cos^2\theta - \cos\theta - 2)$

↓ $\cos\theta$ の2次式とみて平方完成！ $(-1 \leqq \cos\theta \leqq 1)$

$= -4\sqrt{3}\left(\cos\theta - \frac{1}{2}\right)^2 + 9\sqrt{3}$ $(-1 \leqq \cos\theta \leqq 1)$

よって $\cos\theta = \frac{1}{2}$ $\left(\theta = \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi\right)$ のとき、max $9\sqrt{3}$



よって $\cos\theta = -1$ $(\theta = \pi)$ のとき min 0

よって $0 \leqq y \leqq 9\sqrt{3}$ //

倍角を用いて

また、$y = 4\sqrt{3}\left(\frac{3}{2} + \cos\theta - \frac{\cos 2\theta}{2}\right)$

$\dfrac{dy}{d\theta} = 4\sqrt{3}\sin 2\theta - 4\sqrt{3}\sin\theta$ //

◎ 曲線の長さ $= \displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$

よって $\displaystyle l = \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 = \left(-4\sqrt{3}\cos 2\theta + 4\sqrt{3}\cos\theta\right)^2 + \left(4\sqrt{3}\sin 2\theta - 4\sqrt{3}\sin\theta\right)^2$$

$$= 96 - 96\left(\cos 2\theta\cos\theta + \sin 2\theta\sin\theta\right)$$

⇓ 加法定理を想起しよう！

$$= 96 - 96\cos\theta$$

◎上の積分の式の $\sqrt{}$ を外すために2乗の形をつくろう!!

半角を用いて

$$= 96 - 96\left(1 - 2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

$$= 192\sin^2\frac{\theta}{2}$$

よって $\displaystyle l = \int_0^{2\pi} \sqrt{192\sin^2\frac{\theta}{2}}\, d\theta$

$\sin\frac{\theta}{2} \geqq 0 \quad \left(\because 0 \leqq \frac{\theta}{2} \leqq \pi\right)$

$$= 8\sqrt{3}\int_0^{2\pi} \sin\frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 8\sqrt{3}\left[-2\cos\frac{\theta}{2}\right]_0^{2\pi}$$

$$= 8\sqrt{3}\cdot 2\{1-(-1)\}$$

$$= 32\sqrt{3}$$ //

$\boxed{3}$ a, b を実数の定数とし $(a, b) \neq (0, 0)$ とする．原点 O を焦点，直線 $2ax + 3by = 1$ を準線とする放物線を C とする．つまり曲線 C 上の点 P$(s,\ t)$ は直線 $2ax + 3by = 1$ までの距離と，原点 O までの距離とが等しい点である．

以下の (1)〜(3) の $\boxed{シ}$ 〜 $\boxed{ナ}$ にあてはまる適切な数または式を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1) s, t の満たす方程式を a, b を用いて表すと

$$\boxed{シ}s^2 - \boxed{ス}st + \boxed{セ}t^2 + \boxed{ソ}s + \boxed{タ}t - 1 = 0$$

となる．

(2) $a > 0$ とする．曲線 C 上を点 P が動くとき，P の x 座標 s には最大値がある．その最大値を与える点を Q とする．

(i) $b = 0$ のとき，Q の座標を a を用いて表すと $\left(\boxed{チ},\ 0\right)$ となる．

(ii) $b \neq 0$ のとき，Q の座標を a, b を用いて表すと $\left(\boxed{ツ},\ \boxed{テ}\right)$ となる．

(3) a, b が，$a > 0$ かつ $4a^2 + 9b^2 = 1$ を満たしつつ動くとき，点 Q の描く軌跡の方程式を $y^2 = f(x)$ とすると，関数 $f(x) = \boxed{ト}$ である．また，点 Q の x 座標の変域は $x \geqq \boxed{ナ}$ である．

(1)

点P(s, t)と直線 $2ax+3by=1$ のキョリは

点と直線のキョリの公式を用いて $\dfrac{|2as+3bt-1|}{\sqrt{4a^2+9b^2}}$

そして，点O$(0,0)$の点Pのキョリは $\sqrt{s^2+t^2}$ より

$$\frac{|2as+3bt-1|}{\sqrt{4a^2+9b^2}} = \sqrt{s^2+t^2}$$

答えの□に当てはめるために 2乗して$(4a^2+9b^2)$を掛けると

⇓

$$4a^2s^2+9b^2t^2+12abst-4as-6bt+1 = 4a^2s^2+9b^2s^2+4a^2t^2+9b^2t^2$$

⇓ 整理すると，

$$9b^2s^2-12abst+4a^2t^2+4as+6bt-1=0 \quad \cdots\cdots (*)$$

(2) $b=0$ のとき $(*)$ に代入すると

$$4a^2t^2+4as-1=0$$

$\therefore S = \dfrac{1-4a^2t^2}{4a}$ が max となるとき，

問題文より $t=0$ なので $S=\dfrac{1}{4a}$ より $Q\left(\dfrac{1}{4a}, 0\right)$ //

$b \neq 0$ のとき，$(*)$ より

$$4a^2t^2+2(3b-6abs)t+9b^2s^2+4as-1=0 \quad \text{—— (☆)}$$

t の存在条件は この二次式が実数解をもつ ということなので，

判別式をDとすると $D \geqq 0$ より

$$\frac{D}{4} = (3b-6abs)^2-4a^2(9b^2s^2+4as-1)$$
$$= b^2-36ab^2s-16a^3s+4a^2$$

$D \geqq 0$ より $36ab^2s+16a^3s \leqq 9b^2+4a^2$

$a>0$ に注意して

$$S \leqq \frac{9b^2+4a^2}{4a(9b^2+4a^2)} = \frac{1}{4a}$$

よって S の max は $\frac{1}{4a}$ //

このとき (☆) に代入すると

$$4a^2t^2-6\left(2\cdot\frac{1}{4a}-1\right)bt+9b^2\left(\frac{1}{4a}\right)^2+4a\cdot\frac{1}{4a}-1=0$$

$$\Leftrightarrow\ 4a^2t^2+3bt+\frac{9b^2}{16a^2}+1-1=0$$

$$\Leftrightarrow\ \left(2at+\frac{3b}{4a}\right)^2=0$$

$$\therefore\ t=-\frac{3b}{8a^2}\quad \therefore\ Q\left(\frac{1}{4a},\ -\frac{3b}{8a^2}\right)$$

(3) $Q\left(\frac{1}{4a},\ -\frac{3b}{8a^2}\right)$ をみたす。（$b=0$ のときも満たす）

よって $Q(X, Y)$ とすると

$$\begin{cases} X=\dfrac{1}{4a} & \cdots\cdots ① \\ Y=-\dfrac{3b}{8a^2} & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

$a>0$ より $X \neq 0$ なので、

$a=\frac{1}{4X}$ より $b=-\frac{8}{3}a^2Y=-\frac{Y}{6X^2}$ と表せる。

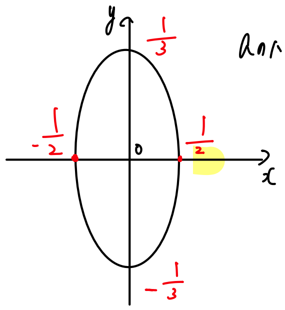
問題文より $4a^2+9b^2=1$ に代入して

$$4\left(\frac{1}{4X}\right)^2+9\left(\frac{Y}{-6X^2}\right)^2=1$$

$$\therefore\ \frac{1}{4X^2}+\frac{Y^2}{4X^4}=1$$

$$\therefore\ Y^2=X^2(4X^2-1)\ //$$

また、$a>0$ かつ $4a^2+9b^2=1$ より



a のハンイは $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ で

ここに $a=\frac{1}{4x}$ を代入すると

$x \geqq \frac{1}{2}$ //

4 微分可能な関数 $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ は,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

で定義される．以下の (1)，(2) に対する解答を解答用紙の所定の欄に記入せよ．

(1) n を正の整数とする．定義にしたがって関数 $f(x) = x^n$ の導関数を求めよ．

(2) x を 0 でない実数とする．定義にしたがって関数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ の導関数を求めよ．

なお $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ は用いてよい．

(1) 問題文より定義に従うと,

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n} ({}_nC_k \cdot x^k \cdot h^{n-k}) - x^n}{h} \quad (\because \text{二項定理})$$

x^n は $k=n$ のときの ${}_nC_k\ x^k \cdot h^{n-k}$ より

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k \cdot x^k \cdot h^{n-k}}{h}$$

① 分母の h をどうにか消去できるよう変形する！

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k\, x^k \cdot h^{n-k-1}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k \cdot x^k \cdot h^{n-k-1}$$

$$= {}_nC_{n-1}\, x^{n-1} = n \cdot x^{n-1} \ /\!/$$

(2) $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{\sin(x+h)}{x+h} - \dfrac{\sin x}{x}}{h}$$

◎ 加法定理を用いて整理すると

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x(\sin x \cos h + \cos x \sin h) - (x+h)\sin x}{hx(x+h)}$$

◎ $\dfrac{\sin h}{h}$ をうまく作っていこう!!

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\sin x}{x+h} \cdot \left(- \frac{1-\cos h}{h^2} \right) \cdot h + \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\cos x}{x+h} - \frac{\sin x}{x(x+h)} \right\}$$

$$= \lim_{h \to 0} \left\{ \frac{\sin x}{x+h} \left(\frac{\sin h}{h} \right)^2 \cdot \frac{-1}{1+\cos h} \cdot h + \frac{\sin h}{h} \cdot \frac{\cos x}{x+h} - \frac{\sin x}{x(x+h)} \right\}$$

◎ $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = 1$ より

$$= \frac{\sin x}{x} \cdot 1^2 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot 0 + 1 \cdot \frac{\cos x}{x} - \frac{\sin x}{x^2}$$

$$= \frac{x \cos x - \sin x}{x^2} \quad //$$

◎ $\sin x$ と $\sin h$ は $h \to 0$ のとき 全く違うことに気をつけよう!