ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

大阪医科薬科大学
医学部

一般選抜 後期

ゴウカライズ
オンライン大学受験絶対合格プロジェクト

1

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{9}{x}\right)$$

と定め、$y=f(x)$ のグラフを曲線 C とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の増減、極値、グラフの漸近線を調べ、曲線 C の概形をかけ。

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, \ldots, \mathrm{A}_n, \ldots$ および直線 $y=\frac{1}{2}x$ 上の点 $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2, \ldots, \mathrm{B}_n, \ldots$ を次のように定める。
$\mathrm{A}_1=(1, f(1))$ とする。$n=1,2,3,\ldots$ に対して、点 A_n を通り y 軸に平行な直線と $y=\frac{1}{2}x$ との交点を B_n、点 B_n から曲線 C に接線を引いて接点を A_{n+1} とする。

(i) $\mathrm{A}_n(a_n, f(a_n))$ $(n=1,2,3,\ldots)$ とするとき、a_{n+1} を a_n で表せ。また、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(ii) $b_n=(\log_2 a_{2n})\cdot(\log_2 a_{2n+2})$ とするとき、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$ の和を求めよ。

2

複素数 $z=\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi$ について、次の問いに答えよ。ただし、i は虚数単位である。

(1) $z^{567}+\dfrac{1}{z^{567}}$ の値を求めよ。

(2) $\left(z+z^2+z^4\right)\left(z^3+z^5+z^6\right)$ の値を求めよ。

(3) $z+z^2+z^3$ の実部の値を求めよ。

3

座標平面上に曲線 $C: y=\sqrt{x^2-4}\,(x \geqq 2)$ がある。点 $(1,0)$ を通る C の接線を ℓ とし、次の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。また、ℓ と曲線 C の接点の座標を求めよ。

(2) t を 0 以上の実数とする。曲線 C と直線 $x=e^t+e^{-t}$ の共有点の y 座標を t を用いて表せ。

(3) 直線 ℓ, 曲線 C および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

4

1 から 10 までの数字が 1 つずつ書かれた 10 枚の番号札が箱の中に入っている。この箱から番号札を 1 枚取り出し、数字を記録してからもとに戻すという試行を 3 回繰り返す。記録した数字の最大値を X, 最小値を Y とするとき、次の問いに答えよ。ただし、設問 (1) は結果のみを解答せよ。

(1) $X>Y$ である確率を求めよ。

(2) $X \leqq Y+2$ である確率を求めよ。

(3) $X \geqq 8$ のとき、$Y \leqq 2$ である条件付き確率を求めよ。

$\boxed{1}$

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{9}{x}\right)$$

と定め、$y=f(x)$ のグラフを曲線 C とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の増減、極値、グラフの漸近線を調べ、曲線 C の概形をかけ。

(2) 曲線 C 上の点 $\mathrm{A}_1,\mathrm{A}_2,\dots,\mathrm{A}_n,\dots$ および直線 $y=\frac{1}{2}x$ 上の点 $\mathrm{B}_1,\mathrm{B}_2,\dots,\mathrm{B}_n,\dots$ を次のように定める。
$\mathrm{A}_1=(1,f(1))$ とする。$n=1,2,3,\dots$ に対して、点 A_n を通り y 軸に平行な直線 と $y=\frac{1}{2}x$ との交点を B_n, 点 B_n から曲線 C に接線を引いて接点を A_{n+1} とする。

(i) $\mathrm{A}_n(a_n,f(a_n))$ $(n=1,2,3,\dots)$ とするとき、a_{n+1} を a_n で表せ。また、数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

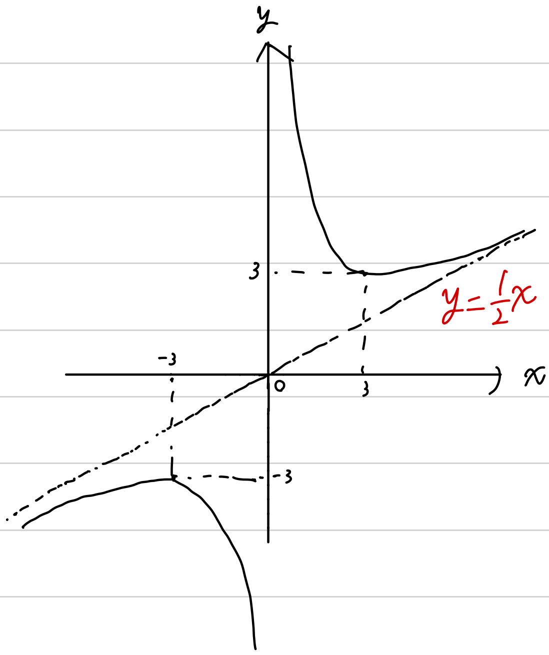
(ii) $b_n=(\log_2 a_{2n})\cdot(\log_2 a_{2n+2})$ とするとき、無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}$ の和を求めよ。

(1) $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{9}{2x^2}$

より $f'(x)=0$ の解は $x=\pm3$

増減表は下のようになる。

x		-3	$\cdots$	3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	3	$\nearrow$



漸近線は $x=0,\ y=\frac{1}{2}x$

(2) $\left(a_n,\frac{a_n}{2}\right)$ から C に接線を引いた時の

接点を求める。

$f'(x)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{9}{x^2}\right)$ より

曲線の接線を $x=a_{n+1}$ で引くと

接線の方程式は

$y-f(a_{n+1})=f'(a_{n+1})(x-a_{n+1})$

これが $\left(a_n,\frac{a_n}{2}\right)$ を通るので

$$\frac{a_n}{2}-\frac{1}{2}\left(a_{n+1}+\frac{9}{a_{n+1}}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{9}{a_{n+1}^2}\right)(a_n-a_{n+1})$$

これを整理すると $\frac{9}{a_{n+1}}=\frac{9a_n}{2a_{n+1}^2}$ となり、$\underline{a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n}$ // $a_1=1$ なので、$\underline{a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$ //

(3) $\log_2 a_{2n}=-(2n-1)$

$\log_2 a_{2n+2}=-(2n+1)$

よって $b_n=(2n-1)(2n+1)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{b_n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right) \text{ を求める。}$$

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots-\frac{1}{2N+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2N+1}\right)$$

より $N\to\infty$ として、$\underline{\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n=\frac{1}{2}}$ //

$\boxed{2}$

複素数 $z=\cos\frac{2}{7}\pi+i\sin\frac{2}{7}\pi$ について、次の問いに答えよ。ただし、i は虚数単位である。

(1) $z^{567}+\frac{1}{z^{567}}$ の値を求めよ。

(2) $\left(z+z^2+z^4\right)\left(z^3+z^5+z^6\right)$ の値を求めよ。

(3) $z+z^2+z^3$ の実部の値を求めよ。

(1) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ のとき $z^7=\cos 7\theta+i\sin 7\theta$ であることを用いる。

$z^7=1$ となるので

$(z^7)^{81}+\frac{1}{(z^7)^{81}}=\underline{2}$

(2) 展開すると

$(z+z^2+z^4)(z^3+z^5+z^6)=z^4+z^6+1+z^5+1+z+1+z^2+z^3$

$=2+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$

また、$z^7-1=0$ より $(z-1)(z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1)=0$

$z\neq 1$ より $z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1=0$

よって求める答えは $\underline{1}$

(3) zは単位円上の $\frac{2}{7}\pi$ 回転にあたるので

$z^6=\bar{z}$ $z^5=\bar{z}^2$ $z^4=\bar{z}^3$ となる。

$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=-1$ ですが、

左辺は、$(z+\bar{z})+(z^2+\bar{z}^2)+(z^3+\bar{z}^3)$ となる。

zの実部の2倍

よって求める答えは $\underline{-\frac{1}{2}}$

$\boxed{3}$

座標平面上に曲線 $C: y=\sqrt{x^2-4}\,(x \geqq 2)$ がある。点 $(1,0)$ を通る C の接線を ℓ とし、次の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。また、ℓ と曲線 C の接点の座標を求めよ。

(2) t を 0 以上の実数とする。曲線 C と直線 $x=e^t+e^{-t}$ の共有点の y 座標を t を用いて表せ。

(3) 直線 ℓ, 曲線 C および x 軸によって囲まれる部分の面積を求めよ。

(1)

$y'=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$

よって $(a, \sqrt{a^2-4})$ における接線の方程式は

$$y-\sqrt{a^2-4}=\frac{a}{\sqrt{a^2-4}}(x-a)$$

これが $(1,0)$ を通るので

$-\sqrt{a^2-4}=\dfrac{a-a^2}{\sqrt{a^2-4}}$

より. $a=4$

接線 ℓ の方程式は $\underline{y=\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{\sqrt{3}}}$ //

(2)

$x=e^t+e^{-t}$ とおくと

$y^2=(e^t+e^{-t})^2-4$

$=(e^t-e^{-t})^2$

$\underline{y=e^t-e^{-t}}$ //

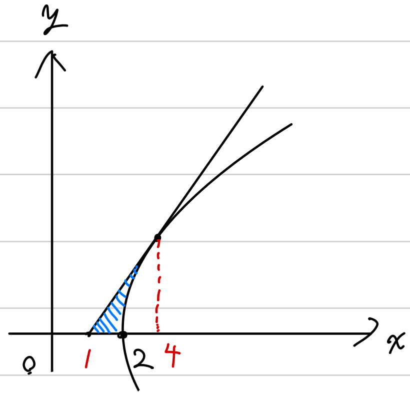
(3)

グラフより求める面積は、

$\int_2^4\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)-\sqrt{x^2-4}\right\}dx+\frac{1}{\sqrt{3}}$ 区間 $[1,2]$ の三角形

$\left[\frac{1}{\sqrt{3}}x^2-\frac{2}{\sqrt{3}}x\right]_2^4+\frac{1}{\sqrt{3}}-\int_2^4\sqrt{x^2-4}\,dx$

$=3\sqrt{3}-\int_2^4\sqrt{x^2-4}\,dx$



後者の積分を求める。

$x=e^t+e^{-t}$ とおくと. $\dfrac{dx}{dt}=e^t-e^{-t}$

$\int_2^4\sqrt{x^2-4}\,dx=\int_0^\alpha\sqrt{(e^t+e^{-t})^2-4}\,(e^t-e^{-t})\,dt$

$=\int_0^\alpha(e^{2t}-2+e^{-2t})\,dt$

$=\left[\frac{e^{2t}}{2}-2t-\frac{e^{-2t}}{2}\right]_0^\alpha$

$=\dfrac{e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}}{2}-2\alpha$

$=4\sqrt{3}-2\log(2+\sqrt{3})$

ここで. $e^\alpha+e^{-\alpha}=4$ より

$(e^\alpha)^2-4e^\alpha+1=0$

$\alpha=\log(2+\sqrt{3})$

よって求める答えは $\underline{-\sqrt{3}+\log(2+\sqrt{3})}$ //

$\boxed{4}$

1 から 10 までの数字が 1 つずつ書かれた 10 枚の番号札が箱の中に入っている。この箱から番号札を 1 枚取り出し、数字を記録してからもとに戻すという試行を 3 回繰り返す。記録した数字の最大値を X，最小値を Y とするとき、次の問いに答えよ。ただし、設問 (1) は結果のみを解答せよ。

(1) $X > Y$ である確率を求めよ。

(2) $X \leqq Y + 2$ である確率を求めよ。

(3) $X \geqq 8$ のとき、$Y \leqq 2$ である条件付き確率を求めよ。

---

(1) $\frac{99}{100}$

(2) 最大値と最小値の差 $d = X - Y$ が 0、1、2 の場合を考えることと同値

(i) $d = 0$

10通り

(ii) $d = 1$

$\{m, m+1\}$ のみが出ることより、

$2^3 - \underbrace{2}_{\{m\}\{m+1\}} = 6$通り

$1 \leqq m \leqq 9$ で 9通りあるので、$9 \times 6 = 54$通り

(iii) $d = 2$

$\{m, m+1, m+2\}$ のみ出て、m, $m+2$ は必ず出る

$3^3 - \underbrace{8}_{\{m, m+1\}} - \underbrace{8}_{\{m+1, m+2\}} + \underbrace{1}_{m+1のみ} = 12$

$1 \leqq m \leqq 8$ で 8通りあるので、$8 \times 12 = 96$通り

$10 + 54 + 96 = 160$

$\frac{160}{1000} = \frac{4}{25}$ //

(3) 余事象を求める！

$X \geqq 8$ かつ $Y \leqq 2$ となる確率を求める。

「3回のうち 少なくとも1回は $\{8, 9, 10\}$ を引き、かつ

少なくとも1回は $\{1, 2\}$ を引く」…☆ の確率を求めればよい。

余事象を考える。

$\{1, 2\}$ を引かない $\longrightarrow$ $8^3 = 512$通り

$\{8, 9, 10\}$ を引かない $\longrightarrow$ $7^3 = 343$通り

両方引かない $\longrightarrow$ $5^3 = 125$通り

よって☆の余事象は $512 + 343 - 125 = 730$通り

求める☆の確率は $\frac{270}{1000} = \frac{27}{100}$

よって $\frac{P(X \geqq 8, Y \leqq 2)}{P(X \geqq 8)} = \frac{\frac{270}{1000}}{\frac{657}{1000}} = \frac{30}{73}$ //