ゴウカライズ
数学
2025
大学入試 解答速報

岡山理科大学
獣医学部
(1/30実施 一般入試前期A日程)

ゴウカライズ
オンライン大学受験総合合格プロジェクト

1

次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}$ の整数部分を a, 小数部分を b とするとき, $a^2+4ab+b^2$ の値を求めよ.

(2) 全体集合 U を整数全体の集合とし, U の部分集合 A, B を
$A=\{a\,|\,a\text{は負の整数}\}$
$B=\{n^2-2n-3\,|\,n=1,2,3,\cdots\}$
とする. このとき, $A\cap B$ を求めよ.

(3) 実数 a, x, y, z が 4 つの式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{11}{3}$, $a=2^x$, $a^2=8^y$, $a^3=\dfrac{1}{4^z}$ を満たすとき, a の値を求めよ.

2

関数 $y=2\sin\theta\cos\theta+\sin\theta+\cos\theta-1$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $x=\sin\theta+\cos\theta$ とするとき, 関数 y を x の式として表せ.

(2) (1) で定めた x の値の範囲を求めよ.

(3) 関数 y の最大値と最小値を求めよ.

3

正の整数 n に対して, 次の条件 $(*)$ を満たす整数 x, y の組 $(x,\ y)$ の個数を a_n とする.

条件$(*)$「$1\leqq x\leqq n$ かつ $0\leqq y\leqq\log_3 x$」

次の問いに答えよ.

(1) $n=3$ のとき, 条件 $(*)$ を満たす整数 x, y の組 $(x,\ y)$ を全て求めよ.

(2) a_{11} を求めよ.

(3) $a_n\geqq150$ を満たす最小の n を求めよ.

$\boxed{1}$

次の問いに答えよ.

(1) $\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}$ の整数部分を a, 小数部分を b とするとき, $a^2+4ab+b^2$ の値を求めよ.

(2) 全体集合 U を整数全体の集合とし, U の部分集合 A, B を
$A=\{a\,|\,a$は負の整数$\}$
$B=\{n^2-2n-3\,|\,n=1,2,3,\cdots\}$
とする. このとき, $A\cap B$ を求めよ.

(3) 実数 a, x, y, z が 4 つの式 $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{11}{3}$, $a=2^x$, $a^2=8^y$, $a^3=\dfrac{1}{4^z}$ を満たすとき, a の値を求めよ.

$\boxed{1}$

(1) $\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}=\dfrac{4(\sqrt{6}+2)}{(\sqrt{6}-2)(\sqrt{6}+2)}=2\sqrt{6}+4=\sqrt{24}+4$ 変形

$4\leqq\sqrt{24}<5$ より

$8\leqq 2\sqrt{6}+4<9$ なので $a=8$ $b=2\sqrt{6}-4$

ここで、

$a^2+4ab+4b^2=(a+2b)^2=(8+4\sqrt{6}-8)^2=96$

(2) $A\cap B$ は n^2-2n-3 が負の値をとるときの その値.

$n^2-2n-3<0$ なる $n\,(\in\mathbb{N})$ は、

$(n-3)(n+1)<0$ $\therefore$ $-1<n<3$ より $n=1,2$

$n=1$ のとき $n^2-2n-3=-4$

$n=2$ のとき、$n^2-2n-3=-3$ より $A\cap B=\{-3,-4\}$

(3) <方針 : log をとる.>

$a=2^x$ $\therefore$ $x=\log_2 a$ —①

$a^2=8^y$ $\therefore$ $2\log_2 a=3y$ $\therefore$ $y=\frac{2}{3}\log_2 a$ —②

$a^3=\frac{1}{4^z}=2^{-2z}$ $\therefore$ $-2z=3\log_2 a$ $\therefore$ $z=-\frac{3}{2}\log_2 a$ —③

①②③ を与式に代入して、

$$\frac{1}{\log_2 a}+\frac{3}{2\log_2 a}-\frac{2}{3\log_2 a}=\frac{11}{3}$$

$\therefore$ $\dfrac{6+9-4}{6\log_2 a}=\dfrac{22}{6}$ $\therefore$ $\log_2 a=\dfrac{1}{2}$ $\therefore$ $a=\sqrt{2}$

$\boxed{2}$

関数 $y = 2\sin\theta\cos\theta + \sin\theta + \cos\theta - 1\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ について, 次の問いに答えよ.

(1) $x = \sin\theta + \cos\theta$ とするとき, 関数 y を x の式として表せ.

(2) (1) で定めた x の値の範囲を求めよ.

(3) 関数 y の最大値と最小値を求めよ.

$\boxed{2}$

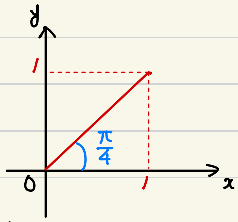
(1) $x = \sin\theta + \cos\theta$ の 両辺 2乗して、

$x^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

∴ $2\sin\theta\cos\theta = x^2 - 1$

よって

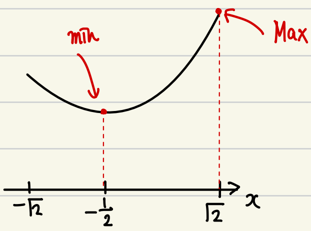
$y = (x^2-1) + x - 1 = x^2 + x - 2$



(2) $x = \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right)\quad (0 \leqq \theta < 2\pi)$

より $-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$

(3) $y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}\quad (-\sqrt{2} \leqq x \leqq \sqrt{2})$ より、下図 より、



$$\begin{cases} y_{Max} = y\big|_{x=\sqrt{2}} = 2 + \sqrt{2} - 2 = \sqrt{2} \\ y_{min} = y\big|_{x=-\frac{1}{2}} = -\frac{9}{4} \end{cases}$$

$\boxed{3}$

正の整数 n に対して, 次の条件 $(*)$ を満たす整数 x, y の組 (x, y) の個数を a_n とする.

$$\text{条件}(*)「1 \leqq x \leqq n \text{ かつ } 0 \leqq y \leqq \log_3 x」$$

次の問いに答えよ.

(1) $n = 3$ のとき, 条件 $(*)$ を満たす整数 x, y の組 (x, y) を全て求めよ.

(2) a_{11} を求めよ.

(3) $a_n \geqq 150$ を満たす最小の n を求めよ.

$\boxed{3}$

(1) $n=3$ のとき条件は

「$1 \leqq x \leqq 3$ かつ $0 \leqq y \leqq \log_3 x$」

ここで $\log_3 x$ に注目する。

$x=1, 2$ のとき、$0 \leqq \log_3 x < 1$ より、条件を満たす y は $y=0$ のみ、

$x=3$ のとき、$1 \leqq \log_3 x < 2$ より、条件を満たす y は $y=0, 1$

以上より、$(x, y) = (1, 0)(2, 0)(3, 0)(3, 1)$ //

(2) $n=11$ のとき、(1)と同様に、条件は

「$1 \leqq x \leqq 11$ かつ $0 \leqq y \leqq \log_3 x$」

$x=1, 2$ のとき $0 \leqq \log_3 x < 1$ より 条件をみたす y は $y=0$

$3 \leqq x \leqq 8$ のとき $1 \leqq \log_3 x < 2$ より 条件をみたす y は $y=0, 1$

$x=9, 10, 11$ のとき $2 \leqq \log_3 x < 3$ より 条件をみたす y は $y=0, 1, 2$

よって $a_{11} = 2 \times 1 + 6 \times 2 + 3 \times 3 = 23$ //

(3) $S_k = \{(x, y) \mid 1 \leqq x \leqq n$, 「$0 \leqq y \leqq \log_3 x$」となる y が k コ $\}$

$T_k = \{\ x \mid (x, y) \in S_k\}$

とする。

$$x \in T_k \iff k-1 \leqq \log_3 x < k$$
$$\iff 3^{k-1} \leqq x < 3^k$$

であるから、

$$\# S_k = k(3^k - 3^{k-1}) = 2k \cdot 3^{k-1}$$

$a_n \geqq 150$ となる最小の n が T_N の要素であるとすると、(1)より $N \geqq 2$ であり、

$$\sum_{k=1}^{N-1} \# S_k < 150 \leqq \sum_{k=1}^{N} \# S_k$$

S_k の要素の個数は $\# S_k$ とかく

となる。

ここで Σ の公式を使うより N を探す方がはやい。

$N=4$ のとき、

$$\sum_{k=1}^{4-1} 2 \cdot k \cdot 3^{k-1} = 2 + 12 + 54 = 68 < 150$$

$$\sum_{k=1}^{4} 2 \cdot k\, 3^{k-1} = 2 + 12 + 54 + 8 \cdot 27 \geqq 150$$ より 適するので

したがって、$a_n \geqq 150$ となる最小の n は T_4 に含まれる

次に n が T_4 の要素を小さい順に並べたときの m 番目とすると、

$$\sum_{k=1}^{3} \# S_k = 68$$

とあわせて、

$$68 + 4(m-1) < 150 \leqq 68 + 4m$$

$\therefore m = 21$

よって最小の n は、

$$\left(\sum_{k=1}^{3} \# T_k\right) + 21 = 47$$ //