ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

日本大学

生物資源科学部 獣医学科

第1期

次の $\boxed{1}$ から $\boxed{52}$ の解答を解答欄にマークしなさい。ただし、分数形で解答する場合はそれ以上約分できない形で答え、根号を含む形で解答する場合は根号内に現れる自然数が最小となる形で答えなさい。

$\boxed{1}$

(1) $x = 2+\sqrt{3},\quad y = 2-\sqrt{3}$ のとき、$x^2+y^2 = \boxed{1}\,\boxed{2},\quad x^2-y^2 = \boxed{3}\sqrt{\boxed{4}}$ である。

(2) 3 辺の長さが $x, 4, 5$ である三角形について、x のとり得る値の範囲は $\boxed{5} < x < \boxed{6}$ である。

(3) 方程式 $(\log_2 x)^2 - 8\log_8 x^3 + 12 = 0$ の解は $x = \boxed{7},\quad \boxed{8}\,\boxed{9}$ である。

(4) 2 つの変量 x, y のデータが、5 個の x, y の組として、次のように与えられている。

$$(2,2), (3,3), (5,4), (4,3), (6,6)$$

このとき、x と y の共分散は $\boxed{10}.\boxed{11}$ である。

$\boxed{2}$

(1)

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+3h)^3-(x-h)^3}{h} = \boxed{12}\,\boxed{13}\,x^2$$

(2) 2 直線 $y = 7x,\ y = 57x$ のなす角を θ とするとき、$\tan\theta = \dfrac{\boxed{14}}{\boxed{15}}$ である。ただし、$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

(3) 連立方程式

$$\begin{cases} y^2 + x + 12y + 34 = 0, \\ xy + 3x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

の解のうち、$xy < 0$ を満たすものは $x = \boxed{16},\ y = \boxed{17}$ である。

(4)

$$\sum_{k=1}^{9} k \cdot 2^k = \boxed{18}\,\boxed{19}\,\boxed{20}\,\boxed{21}$$

3

座標平面上の曲線 $y=\dfrac{x^2}{2}$ を C_1、曲線 $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{9}{2}$ を C_2 とする。原点を通り、C_2 と接する傾きが正の直線を ℓ とする。ℓ に垂直で、C_2 と接する直線を m とする。次の問いに答えなさい。

(1) C_1 と ℓ の原点以外の交点は $(\boxed{22},\ \boxed{23}\,\boxed{24})$ である。

(2) C_1 と ℓ で囲まれた部分の面積を S_1、C_1 と m で囲まれた部分の面積を S_2 とすると、

$$S_1=\boxed{25}\,\boxed{26},\quad S_2=\boxed{27}\,\boxed{28}$$

である。

(3) C_1 と ℓ で囲まれた部分と、C_1 と m で囲まれた部分の共通部分の面積は $\dfrac{\boxed{29}\,\boxed{30}\,\boxed{31}}{\boxed{32}\,\boxed{33}}$ である。

4

座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(4,1,0)$, $\mathrm{B}(-4,1,0)$, $\mathrm{C}(4,1,6)$ がある。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ を満たす点 P 全体の集合は球面 S_1 を定め、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0$ を満たす点 Q 全体の集合は球面 S_2 を定める。次の問いに答えなさい。

(1) S_1 の中心は $(\boxed{34},\ \boxed{35},\ \boxed{36})$ であり、半径は $\boxed{37}$ である。

(2) S_1 と S_2 が交わってできる円の半径を r とすると、$r=\dfrac{\boxed{38}\,\boxed{39}}{\boxed{40}}$ である。

(3) (2) の円上の互いに異なる 3 点と S_1 の中心を頂点とする四面体の体積の最大値は $\dfrac{\boxed{41}}{\boxed{42}}\sqrt{\boxed{43}}\,r^2$ である。

5

1個のさいころを3回続けて投げる。1回目に出る目を a、2回目に出る目を b、3回目に出る目を c とする。このとき、2次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ①$$

について、次の問いに答えなさい。

(1) 2次方程式 ① が $x = -1$ を解にもつ組 (a, b, c) は全部で $\boxed{44}\,\boxed{45}$ 個あり、$x = -2$ を解にもつ組 (a, b, c) は全部で $\boxed{46}$ 個ある。

(2) 2次方程式 ① が実数を解にもつ組 (a, b, c) は全部で $\boxed{47}\,\boxed{48}$ 個ある。

(3) 2次方程式 ① が有理数を解にもつ組 (a, b, c) は全部で $\boxed{49}\,\boxed{50}$ 個ある。このとき、解のとり得る値は全部で $\boxed{51}\,\boxed{52}$ 個ある。

$\boxed{1}$

(1) $x=2+\sqrt{3},\quad y=2-\sqrt{3}$ のとき、$x^2+y^2=\boxed{1}\,\boxed{2},\quad x^2-y^2=\boxed{3}\sqrt{\boxed{4}}$ である。

(2) 3 辺の長さが $x, 4, 5$ である三角形について、x のとり得る値の範囲は $\boxed{5}<x<\boxed{6}$ である。

(3) 方程式 $(\log_2 x)^2-8\log_8 x^3+12=0$ の解は $x=\boxed{7},\quad \boxed{8}\,\boxed{9}$ である。

(4) 2 つの変量 x, y のデータが、5 個の x, y の組として、次のように与えられている。

$$(2,2),(3,3),(5,4),(4,3),(6,6)$$

このとき、x と y の共分散は $\boxed{10}.\boxed{11}$ である。

---

(1) 愚直に手を動かそう!!

$x^2+y^2=(2+\sqrt3)^2+(2-\sqrt3)^2$
$=4+\sqrt3+\cancel{2\cdot2\sqrt3}+4+3\cancel{-2\cdot2\sqrt3}$
$=14$

$x^2+y^2=(\cancel{7}+4\sqrt3)-(\cancel{7}-4\sqrt3)$
$=8\sqrt3$

別解（因数分解）

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$
$=16\quad-2\cdot1=14$

$x^2+y^2=(x+y)(x-y)$
$=4\cdot2\sqrt3=8\sqrt3$

(2) 三角形の成立条件

$a+b>c$ かつ $b+c>a$ かつ $c+a>b$
$\Downarrow$
aについてとくと
$|b-c|<a<b+c$

$|4-5|<x<4+5$
$1<x<9$

(3)

$$(\log_2 x)^2 - 8\log_2 x + 12 = 0$$

$x>0$ であることに注意する。

◎ポイント

$\log_2 x = A$ とおき、Aの二次方程式とみる。

$$A^2 - 8A + 12 = 0$$

$$(A-2)(A-6) = 0$$

$$A = 2, 6$$

$$\log_2 x = 2, 6$$

$$\begin{cases} \cdot \log_2 x = 2 \iff x = 4 \\ \cdot \log_2 x = 6 \iff x = 64 \end{cases}$$

$$\therefore x = 4, 64$$

(4)

共分散

xの平均値　yの平均値

$$S_{xy} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

$$\bar{x} = \frac{2+3+5+4+6}{5} = 4$$

$$\bar{y} = \frac{2+3+4+3+6}{5} = \frac{18}{5}$$

$$S_{xy} = \frac{1}{5}\left\{(-2)\times\left(-\frac{8}{5}\right) + (-1)\times\left(-\frac{2}{5}\right) + 1\times\frac{2}{5} + 0 + 2\times\frac{12}{5}\right\}$$

$$= \frac{9}{5} = 1.8$$

$\boxed{2}$

(1)

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+3h)^3-(x-h)^3}{h} = \boxed{12}\,\boxed{13}\,x^2$$

(2) 2 直線 $y = 7x$, $y = 57x$ のなす角を θ とするとき、$\tan\theta = \dfrac{\boxed{14}}{\boxed{15}}$ である。ただし、$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ とする。

---

(1)

(与式)

展開するときに計算ミスしないようにしよう!

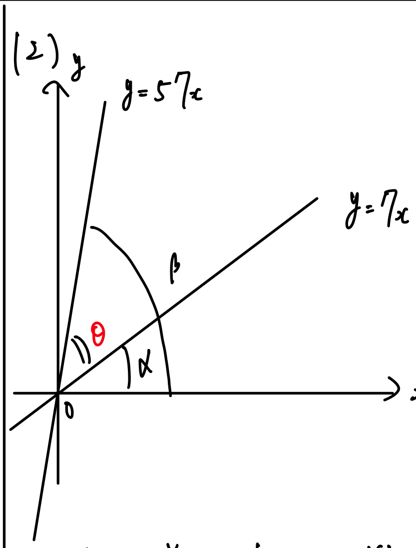
$$= \frac{(x^3+9hx^2+27xh^2+27h^3)-(x^3-3x^2h-3xh^2-h^3)}{h}$$

$$= \frac{12hx^2+24h^2x+28h^3}{h}$$

$$= 12x^2+24hx+28h^3$$

$h \to 0$ $\longrightarrow$ $\underline{12x^2}$

(2)



傾きの差は tan で考えよう!!

$$\begin{cases} \tan\alpha = 7 \\ \tan\beta = 57 \\ \beta - \alpha = \theta \end{cases}$$ より

加法定理より

$$\tan\theta = \tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1-\tan\beta\cdot\tan\alpha}$$

$$= \frac{57-7}{1+57\cdot 7} = \frac{50}{400} = \underline{\frac{1}{8}}$$

(3) 連立方程式

$$\begin{cases} y^2 + x + 12y + 34 = 0, \\ xy + 3x - 2y - 6 = 0 \end{cases}$$

の解のうち、$xy < 0$ を満たすものは $x = \boxed{16}$, $y = \boxed{17}$ である。

(4)

$$\sum_{k=1}^{9} k \cdot 2^k = \boxed{18}\boxed{19}\boxed{20}\boxed{21}$$

---

(3)

$xy<0$ のときを言い換えると

$x>0$ かつ $y<0$ or $x<0$ かつ $y>0$

これを念頭にとく!

$$\begin{cases} y^2+x+12y+34=0 \\ xy+3x-2y-6=0 \end{cases}$$

$$\therefore \begin{cases} y^2+x+12y+34=0 & \text{—①} \\ (x-2)(y+3)=0 & \text{—②} \end{cases}$$

②より

㋐ $x=2$ のとき

$y^2+2+12y+34=0$

$\Rightarrow (y+6)^2=0 \quad \therefore y=-6$ より 適する.

㋑ $y=-3$ のとき

$x+9+36+34=0$

$\Rightarrow x=-79$ より 不適

㋐, ㋑より $(x, y)=(2, -6)$

(4) @ k が $1 \sim 9$ までしかないため、素直に計算してみよう!!

$\sum_{k=1}^{9} k \cdot 2^k$

$= 1\cdot 2+2\cdot 4+3\cdot 8+4\cdot 16+5\cdot 32+6\cdot 64+7\cdot 128+8\cdot 256+9\cdot 512$

$= 2+8+24+64+160+384+896+2048+4608$

$= 8194$

@別解 (漸化式)

$\sum_{k=1}^{n} k\cdot 2^k = S_n$ としたとき

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+3\cdot 2^3+\cdots+n\cdot 2^n \\ -)\ 2S_n = & 1\cdot 2^2+2\cdot 2^3+\cdots+(n-1)\cdot 2^n+k\cdot 2^{n+1} \\ \hline -S_n = & 1\cdot 2^1+1\cdot 2^2+1\cdot 2^3+\cdots+1\cdot 2^n+n\cdot 2^{n+1} \end{array}$$

$= \dfrac{2(2^n-1)}{2-1}+n\cdot 2^{n+1}$

$\therefore S_n = 2+(n-1)\cdot 2^{n+1}$

$\boxed{3}$

座標平面上の曲線 $y=\dfrac{x^2}{2}$ を C_1、曲線 $y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{9}{2}$ を C_2 とする。原点を通り、C_2 と接する傾きが正の直線を ℓ とする。ℓ に垂直で、C_2 と接する直線を m とする。次の問いに答えなさい。

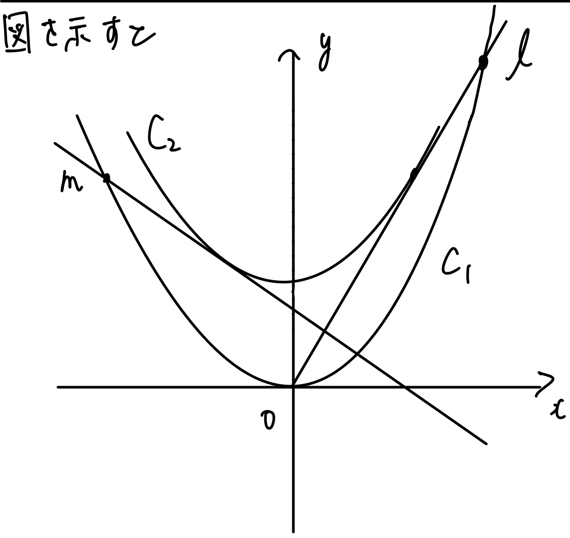
(1) C_1 と ℓ の原点以外の交点は $(\boxed{22}, \boxed{23}\,\boxed{24})$ である。

(2) C_1 と ℓ で囲まれた部分の面積を S_1、C_1 と m で囲まれた部分の面積を S_2 とすると、

$$S_1=\boxed{25}\,\boxed{26},\quad S_2=\boxed{27}\,\boxed{28}$$

である。

図を示すと



(1) C_2 は $y'=x$ より

$x=t$ での接線が原点をとおるとき、

$y=t(x-t)+\frac{t^2}{2}+\frac{9}{2}$ 接線の式

$=tx-\frac{t^2}{2}+\frac{9}{2}$ が $(0,0)$ をとおるとき

$0=-\frac{t^2}{2}+\frac{9}{2}$ ∴ $t>0$ より $t=3$

よって $\ell: y=3x$

ℓ と C_1 の交点は

$\frac{x^2}{2}=3x$ ∴ 交点 $(6, 18)$ //

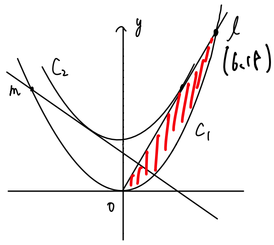
(2)

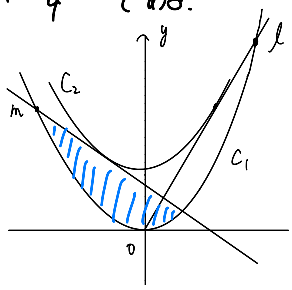
m は ℓ に垂直のため、傾きは $-\frac{1}{3}$

ここで $x=-\frac{1}{3}$ での C_2 の接線の傾きは $-\frac{1}{3}$ より $\left(-\frac{1}{3}, \frac{82}{18}\right)$ より

$m: y=-\frac{1}{3}\left(x+\frac{1}{3}\right)+\frac{82}{18}$

$=-\frac{1}{3}x+\frac{40}{9}$ である。





$S_1=\int_0^6\left(3x-\frac{x^2}{2}\right)dx$ である $\frac{1}{6}$公式 より

$=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}(6-0)^3=18$ //

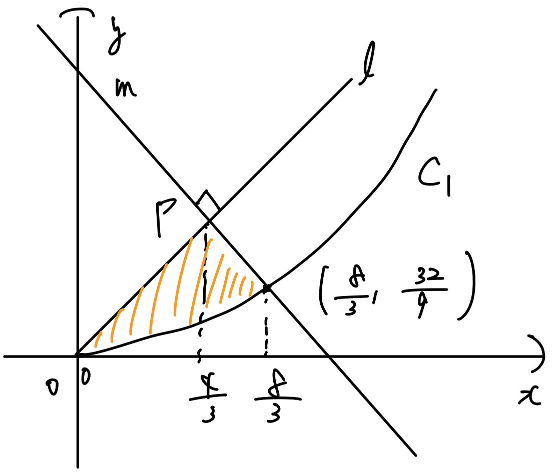
S_2 について C_1 と m の交点をだすと

∴ $9x^2+6x-80=0$ ∴ $x=\frac{8}{3}, -\frac{10}{3}$ より

$\frac{1}{6}$公式を使うと

$S_2=\frac{1}{6}\times\left(\frac{8}{3}+\frac{10}{3}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}\times\frac{1}{2}\times6^3=18$ //

(3) C_1 と ℓ で囲まれた部分と、C_1 と m で囲まれた部分の共通部分の面積は $\dfrac{\boxed{29}\,\boxed{30}\,\boxed{31}}{\boxed{32}\,\boxed{33}}$ である。

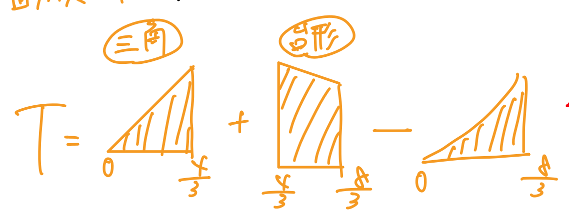


m, ℓ の交点をPとすると

$3x = -\frac{1}{3}x + \frac{40}{9}$　　$\therefore\ x = \frac{4}{3}$

$P\left(\frac{4}{3},\ 4\right)$

面積 T とすると



$= \left(\frac{4}{3} \times 4 \times \frac{1}{2}\right) + \left(4 + \frac{32}{9}\right) \times \frac{4}{3} \times \frac{1}{2} - \int_0^{\frac{8}{3}} \frac{1}{2}x^2\,dx$

$= \frac{8}{3} + \frac{136}{27} - \frac{1}{6} \cdot \frac{512}{27} = \underline{\frac{368}{81}}$

複雑な面積は「分割」しよう!!

$\boxed{4}$

座標空間内に 3 点 A$(4,1,0)$, B$(-4,1,0)$, C$(4,1,6)$ がある。$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ を満たす点 P 全体の集合は球面 S_1 を定め、$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=0$ を満たす点 Q 全体の集合は球面 S_2 を定める。次の問いに答えなさい。

(1) S_1 の中心は $(\boxed{34}, \boxed{35}, \boxed{36})$ であり、半径は $\boxed{37}$ である。

(2) S_1 と S_2 が交わってできる円の半径を r とすると、$r=\dfrac{\boxed{38}\,\boxed{39}}{\boxed{40}}$ である。

(1)

球の中心を通るように平面をとると

問題文より ($\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$) であるため

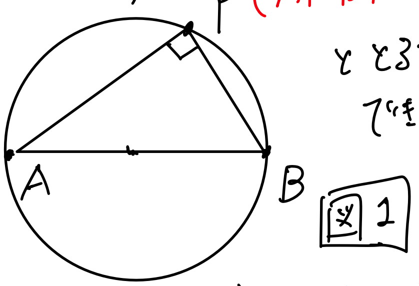


図1

ととることができる！

そのため ABの中点が S_1 の中心より

$$\left(\frac{4-4}{2},\ \frac{1+1}{2},\ \frac{0}{2}\right)$$

$$=(0,1,0)$$

また半径は上図より

$\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|$ より $|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{8^2+0^2+0^2}=8$

図より明らか

より　半径 4

(2)

同じように S_2 についてもとくと、

ACの中点が S_2 の中心より

$$\left(\frac{4+4}{2},\ \frac{1+1}{2},\ \frac{0+6}{2}\right)$$

$$=(4,1,3)$$

半径は $\frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|$ より $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{0^2+0^2+6^2}$

より　半径 3

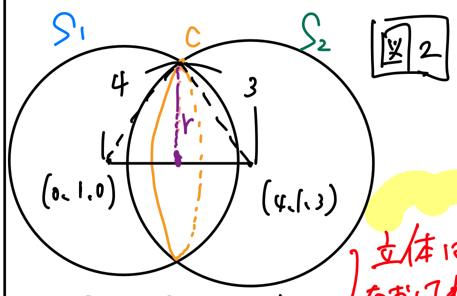


図2

上の図を平面におとすと

立体は平面になおしてわかりやすくする！！

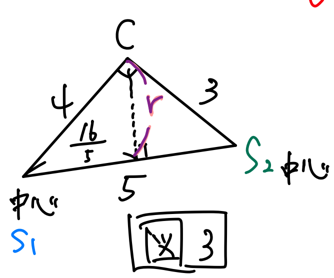


図3

よって

$$r^2=4^2-\left(\frac{16}{5}\right)^2$$

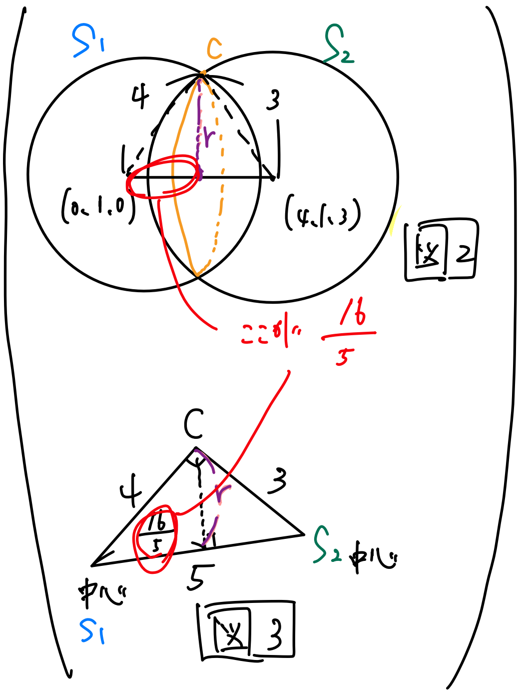
$$=\left(\frac{12}{5}\right)^2$$

$$r=\frac{12}{5}$$

(3) (2) の円上の互いに異なる 3 点と S_1 の中心を頂点とする四面体の体積の最大値は $\dfrac{\boxed{41}}{\boxed{42}}\sqrt{\boxed{43}}\,r^2$ である。

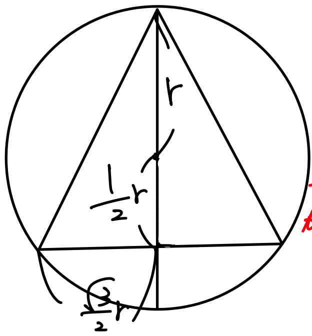
図2、図3より

S_1を頂点としたときの四面体の高さは $\frac{16}{5}$ である。



つまり四面体の最大値を決定するのは
円上の3点を結ぶ面積である。

図に表すと



円に内接する三角形の面積のmaxは
正三角形かつ二等分線が円の中心を通る三角形のため。

よって三角形の面積のmaxは

$$\frac{\sqrt{3}}{4}\times(\sqrt{3}r)^2=\frac{3}{4}\sqrt{3}r^2$$

より

$$V_{max}=\frac{3}{4}\sqrt{3}r^2\times\frac{16}{5}\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{4}{5}\sqrt{3}r^2$$

$\boxed{5}$

1 個のさいころを 3 回続けて投げる。1 回目に出る目を a、2 回目に出る目を b、3 回目に出る目を c とする。このとき、2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad ①$$

について、次の問いに答えなさい。

(1) 2 次方程式 ① が $x = -1$ を解にもつ組 (a, b, c) は全部で $\boxed{44}\,\boxed{45}$ 個あり、$x = -2$ を解にもつ組 (a, b, c) は全部で $\boxed{46}$ 個ある。

(2) 2 次方程式 ① が実数を解にもつ組 (a, b, c) は全部で $\boxed{47}\,\boxed{48}$ 個ある。

---

(1) $x = -1$ を解にもつとき、

$a - b + c = 0$ —— $(*)$ が成立。

これを満たす組は、

⇓ 地道に書き出すしかない！

$(a, b, c) = (1, 2, 1), (1, 3, 2), (2, 3, 1)$
$(1, 4, 3), (2, 4, 2), (3, 4, 1), (1, 5, 4)$
$(2, 5, 3)(3, 5, 2), (4, 5, 1), (1, 6, 5)$
$(2, 6, 4)(3, 6, 3), (4, 6, 2), (5, 6, 1)$

丁寧に数えあげる!!　の 15個 //

同様に $x = -2$ を解にもつ組は、

$4a - 2b + c = 0$ —— $(*)'$ をみたすので

$(a, b, c) = (1, 3, 2), (1, 4, 4), (1, 5, 6)$
$(2, 5, 2), (2, 6, 4)$ の 5個 //

(2) 実数解をもつとき

⇒ 判別式 D より $b^2 - 4ac \geqq 0$ である!!

b の値で場合分けして考える。

b だと場合分けが少なそうだから！

・$b = 1$ のとき　解なし

・$b = 2$ のとき　$ac \leqq 1$ より　$ac = 1$ の組を探して
$(a, c) = (1, 1)$ で、1個 //

・$b = 3$ のとき　$ac \leqq \frac{9}{4}$ より　$ac = 2$ の組を探して
$(a, c) = (1, 2), (2, 1)$ で 2個 //

・$b = 4$ のとき　$ac \leqq 4$ より、$ac = 3, 4$ の組を探して、
$(a, c) = (1, 3)(3, 1), (1, 4)(4, 1)(2, 2)$ で 5個 //

・$b = 5$ のとき　$ac \leqq \frac{25}{4}$ より　$ac = 5 \sim 6$ の組をさがして
$(a, c) = (1, 5), (5, 1), (1, 6)(6, 1)(2, 3)(3, 2)$ で 6個 //

・$b = 6$ のとき　$ac \leqq 9$ より　$ac = 7, 8, 9$ の組を探して
$(a, c) = (2, 4)(4, 2), (3, 3)$ の 3個 //

全て合わせて　∴ 43個 //

(3) 2 次方程式 ① が有理数を解にもつ組 (a, b, c) は全部で $\boxed{49}\boxed{50}$ 個ある。このとき、解のとり得る値は全部で $\boxed{51}\boxed{52}$ 個ある。

有理数を解にもつときは

$ax^2 + bx + c = 0$ の解

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

の部分が K^2 ($K \in \mathbb{Z}$) である。

そのため $b^2 - 4ac = K^2$ の条件を用いる

$\boxed{b}$ について場合分けすると

・$b = 1$ のとき 存在しない

・$b = 2$ のとき $ac = 1$ で 1コ

・$b = 3$ のとき $ac = 2$ で 2コ

・$b = 4$ のとき $ac = 3, 4$ で 5コ

・$b = 5$ のとき $ac = 4, 6$ で 7コ

・$b = 6$ のとき $ac = 5, 8, 9$ より 5コ

よって全て合計して 20個

解のとり得る値を計算していくと、

(a, b, c)

・$(1, 2, 1)$ で $x = -1$

・$(1, 3, 2)$ で $x = -1, -2$

・$(2, 3, 1)$ で $x = -1, -\frac{1}{2}$

・$(1, 4, 3)$ で $x = -1, -3$

・$(3, 4, 1)$ で $x = -1, -\frac{1}{3}$

・$(1, 4, 4)$ で $x = -2$

・$(2, 4, 2)$ で $x = -1$

・$(1, 5, 4)$ で $x = -1, -4$

・$(2, 5, 2)$ で $x = -2, -\frac{1}{2}$

・$(4, 5, 1)$ で $x = -\frac{1}{4}, -1$

・$(1, 5, 6)$ で $x = -2, -3$

・$(2, 5, 3)$ で $x = -1, -\frac{3}{2}$

・$(3, 5, 2)$ で $x = -1, -\frac{2}{3}$

・$(6, 5, 1)$ で $x = -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$

・$(1, 6, 5)$ で $x = -1, -5$

・$(5, 6, 1)$ で $x = -1, -\frac{1}{5}$

・$(2, 6, 4)$ で $x = -1, -2$

・$(4, 6, 2)$ で $x = -1, -\frac{1}{2}$

・$(3, 6, 3)$ で $x = -1$

よって $x = -1, -2, -3, -4, -5, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, -\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{6}, -\frac{1}{5}$

の 11コ