ゴウカライズ

数学

2025

大学入試 解答速報

日本獣医生命科学大学
獣医学部

(3/11 一般選抜第3回)

ゴウカライズ
オンライン大学受験総合合格プロジェクト

$\boxed{\text{I}}$ 整数 a, b は条件

$$7a+5b=1 \text{ かつ } a>0 \quad \cdots\cdots (*)$$

を満たすとする。

次の問い（問 1〜問 3）のそれぞれの枠に当てはまる数字（0〜9）をマークせよ。

問 1 （$*$）を満たす a の最小の値を α とし，そのときの b の値を β とすると

$$\alpha=\boxed{ア},\quad \beta=-\boxed{イ}$$

である。このとき $7\alpha+5\beta=1$ であり，これを（$*$）から引いて整理すると

$$7(a-\alpha)=-5(b-\beta)$$

となるので，$a-\alpha$ は 5 の倍数，$b-\beta$ は 7 の倍数とわかる。したがって

a は 5 で割ると $\boxed{ウ}$ 余る整数

b は 7 で割ると $\boxed{エ}$ 余る整数

である。

問 2 （$*$）を満たし，さらに a^2+b が 5 の倍数であるような組 (a, b) のうち，a の値が 100 に最も近いものは

$$(a, b)=\left(\boxed{オカキ},\ -\boxed{クケコ}\right)$$

である。

問 3 「3^n を 5 で割ると 2 余る」ような自然数 n を考える。そのような n は

4 で割ると $\boxed{サ}$ 余る自然数

である。したがって

（$*$）を満たし，さらに「3^a を 5 で割ると 2 余る」

ような a のうち，2 番目に小さいものは $a=\boxed{シス}$ である。

— 1 —

問 1. $a \in \mathbb{N}$ より. 1 から順に代入すると.

$a=1$ のとき. $7+5b=1$ $b=-\frac{6}{5}$ で不適

$a=2$ のとき. $14+5b=1$ $b=-\frac{13}{5}$ で不適

$a=3$ のとき. $21+5b=1$ $b=-4$

よって, $\alpha=3$, $\beta=-4$

7, 5 は互いに素であることから.

$7(a-\alpha)=-5(b-\beta)$ のとき.

$a-\alpha$ は 5 の倍数. $b-\beta$ は 7 の倍数

よって. ウ, 3 . エ. 3

問 2, $a-\alpha=a-3=5n \quad (n \in \mathbb{Z})$

$a^2=(5n+3)^2=25n^2+30n+9 \equiv 4 \pmod 5$

また. $b-\beta=b+4=7m \quad (m \in \mathbb{Z})$

$b=7m-4$

a^2+b が 5 の倍数になるとき.

$b \equiv 1 \pmod 5$ となる必要がある。

m を $5k, 5k+1, 5k+2, 5k+3, 5k+4$

と場合分けして考える。$(k \in \mathbb{Z})$

i) $m=5k$

$b=35k-4 \equiv 1 \pmod 5$

ii) $m=5k+1$

$b=35k+3 \equiv 3 \pmod 5$

iii) $m=5k+2$

$b=35k+10 \equiv 0 \pmod 5$

iv) $m=5k+3$

$b=35k+17 \equiv 2 \pmod 5$

v) $m=5k+4$

$b=35k+24 \equiv 4 \pmod 5$

よって $m=5k$ すなわち $b=35k-4$.

$a>0$ より. $b<0$ であること.

$7>5$ より $|a|<|b|$ となることは自明なので

$|b|>100$ と考え, $k=-3$ から順に考える。

$k=-3$ のとき. $b=-109$

$7a-545=1$ より $a=78$

$k=-4$ のとき. $b=-144$

$7a-720=1$ より $a=103$

$a=5n+3$ よりこのとき. 条件を満たすのは

$a=103$ であることが分かる。

$\therefore\ a=103,\ b=-144$ //

問3. $3^n \equiv 2 \pmod 5$ となるnを考える。

$3^1 = 3 \equiv 3$, $3^2 = 9 \equiv 4$, $3^3 = 27 \equiv 2$

$3^4 = 81 \equiv 1$, $3^5 = 243 \equiv 3$, $3^6 = 729 \equiv 4$

このように 3^n は下1桁が3.9.7.1…

となり、また $3^n \equiv 2 \pmod 5$ を満たすのは

$n \equiv 3 \pmod 4$ のときである。

よってnは「4で割ると3余る自然数」

つまり、条件を満たすのは

$a = 5n + 3$ かつ、$a = 4l + 3$ $(l \in \mathbb{Z})$

ゆえに、$a = 20j + 3$ $(j \in \mathbb{N})$

よって、2番目に小さいのは $\underline{43}$

Point

合同式 (mod) をうまく使う!

○合同式

ある数nをmで割ったときの余りを l とすると、$n \equiv l \pmod m$ と表せる

Ⅱ x, yを正の実数とする。また、$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする。
次の問い(問1〜問3)のそれぞれの枠に当てはまる数字(0〜9)をマークせよ。

問 1　$x + 2y = 8$ とする。

等式 $ab = \frac{1}{4}\{(a+b)^2 - (a-b)^2\}$ を用いると

$$x \cdot 2y = \frac{1}{4}\left\{\boxed{アイ} - (x-2y)^2\right\}$$

となるので、xy の最大値は $\boxed{ウ}$ であり、そのとき

$$x = \boxed{エ},\ y = \boxed{オ}$$

である。

問 2　$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 8$ とするとき、xy の最小値は $\dfrac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}$ である。

問 3　$\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[3]{y^2} = 100$ とする。

$z = \log_{10} x + \log_{10} y$ とすると

$$(z\text{ の最大値}) = \boxed{ク} - \frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\log_{10} 2$$

である。z が最大値をとるとき、xy 以下で xy に最も近い整数を n とすると

$$(n\text{ の桁数}) = \boxed{サ}$$

$$(n\text{ の最高位の数字}) = \boxed{シ}$$

である。

問1. $a = x$, $b = 2y$ を代入すると

$$x \cdot 2y = \frac{1}{4}\{(x+2y)^2 - (x-2y)^2\}$$

$$= \frac{1}{4}\{64 - (x-2y)^2\}$$

よって $xy = \frac{1}{8}\{64 - (x-2y)^2\}$

xy は $x - 2y = 0$ のとき $\underline{\mathrm{Max}\ 8}$

このとき、$x - 2y = 0$, $x + 2y = 8$

を満たすので、$\underline{x = 4,\ y = 2}$

問2. $x > 0$, $y > 0$ より、$\frac{1}{x} > 0$, $\frac{2}{y} > 0$

相加相乗平均より、$\frac{1}{x} + \frac{2}{y} \geqq 2\sqrt{\frac{2}{xy}}$

よって $8 \leqq 2\sqrt{\frac{2}{xy}}$ 、ゆえに $4 \geqq \sqrt{\frac{2}{xy}}$

両辺正なので、両辺2乗して、$16 \geqq \frac{2}{xy}$

以上より $xy \leqq \frac{1}{8}$ 　　$\underline{\therefore \min \frac{1}{8}}$

問3

$x^{\frac{2}{3}}+2y^{\frac{2}{3}}=100$

$x^{\frac{2}{3}}=A$ $y^{\frac{2}{3}}=B$ とおくと.

$A+2B=100$ となり.

ABの最大値は問1と同様の方法で1250となる.

$(xy)^{\frac{2}{3}}$の最大値が1250なので. xyの最大値は$(1250)^{\frac{3}{2}}$

$z=\log_{10}xy$ なので.

zの最大値は. $z=\log_{10}(1250)^{\frac{3}{2}}$

$$=\frac{3}{2}(1+\log_{10}125)$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{9}{2}\log_{10}5$$
$$=\frac{3}{2}+\frac{9}{2}(1-\log_{10}2)$$
$$=\underline{6-\frac{9}{2}\log_{10}2}$$

桁数や最高位の数字を求める時は. $\log_{10}$ をとることを思いだす!

nは$(1250)^{\frac{3}{2}}$に最も近い整数なので. $(1250)^{\frac{3}{2}}$を元に考える.

$\log_{10}2=0.301$ とすると. $6-\frac{9}{2}\log_{10}2=4.6455$

$4<\log_{10}xy<5$ なので. $\underline{5桁}$

$\log_{10}4<0.6455<\log_{10}5$ なので. 最高位の数は. $\underline{4}$

point

・相加相乗平均

$a>0$. $b>0$ のとき

$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$

($a=b$ のとき. 等号成立)

・桁数. 最高位を調べる時.

↳常用対数 ($\log_{10}$) を使う

Ⅲ 数列 $\{a_n\}$ $(n=1, 2, \cdots)$ を次のように定める。ただし, c は実数の定数である。

$$a_1=c$$
$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n-4 & (a_n<0 \text{ または } a_n>2 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{2}a_n+\frac{5}{2} & (0\leqq a_n\leqq 2 \text{ のとき}) \end{cases} \quad (n=1, 2, \cdots)$$

次の問い (問1〜問3) には, 結果のみでなく説明を付けて答えよ。

問 1 $c=\frac{9}{2}$ のとき, a_2, a_3, a_4 を求めよ。

問 2 $c<0$ のとき, $a_n (n=1, 2, \cdots)$ を求めよ。

問 3 $1\leqq c\leqq 2$ のとき, すべての自然数 n に対して $1\leqq a_n\leqq 2$ であることを示し, $a_n (n=1, 2, \cdots)$ を求めよ。

問1. $2<\frac{9}{2}$ より, $a_2=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}$

$0<\frac{1}{2}<2$ より.

$a_3=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{5}{2}=\frac{9}{4}$

$2<\frac{9}{4}$ より. $a_4=\frac{9}{4}-4=-\frac{7}{4}$

$\underline{\therefore\ a_2=\frac{1}{2},\ a_3=\frac{9}{4},\ a_4=-\frac{7}{4}}$

問2. $a_n<0$ のとき. $a_{n+1}=a_n-4$ であり.

nが大きくなるたび-4されていく。

このとき $0<a_m<2$ $(n<m)$ となることはない。

よって $c<0$ のとき. a_nは初項c 等差-4の等差数列となる。

ゆえに $a_n=c-4(n-1)=-4n+c+4$

$\underline{\therefore\ a_n=-4n+c+4}$

問3. 数学的帰納法を用いて示す。

$n=1$ のとき $1 \leqq c \leqq 2$ より適する。

$n=k$ のとき $1 \leqq a_k \leqq 2$ だと仮定し、

$n=k+1$ のときを考える。

$0 \leqq a_k \leqq 2$ より $a_{k+1} = -\frac{1}{2}a_k + \frac{5}{2}$

よって $\frac{3}{2} \leqq a_{k+1} \leqq 2$ となり、条件を満たす。

以上より、$1 \leqq c \leqq 2$ のとき、

$1 \leqq a_n \leqq 2$ であることが示された。

ゆえにこのとき $a_{n+1} = -\frac{1}{2}a_n + \frac{5}{2}$ は

すべての自然数 n で成り立つ。

$\alpha = -\frac{1}{2}\alpha + \frac{5}{2}$ $\quad \alpha = \frac{5}{3}$

$a_{n+1} - \frac{5}{3} = -\frac{1}{2}\left(a_n - \frac{5}{3}\right)$

$b_n = a_n - \frac{5}{3}$ とおく。$\left(b_1 = c - \frac{5}{3}\right)$

$b_{n+1} = -\frac{1}{2}b_n$ $\quad b_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(c - \frac{5}{3}\right)$

$\therefore\ a_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left(c - \frac{5}{3}\right) + \frac{5}{3}$

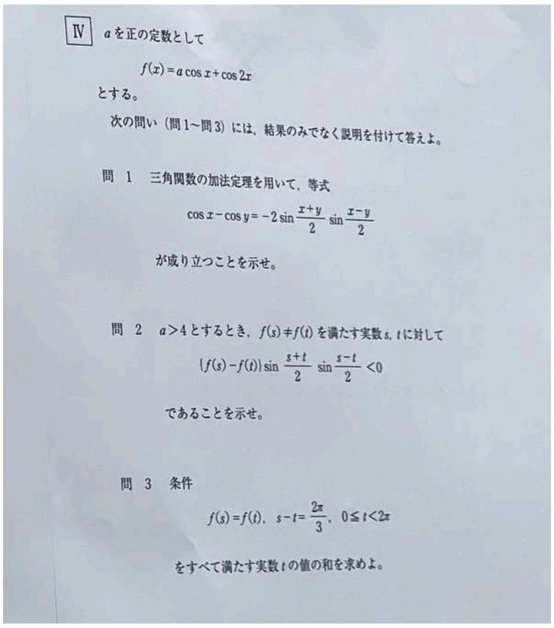
POINT

数学的帰納法

↳ ① $n=1$ を示す

② $n=k$ で成り立つと仮定

③ $n=k+1$ を示す



Ⅳ a を正の定数として

$$f(x) = a\cos x + \cos 2x$$

とする。

次の問い（問1〜問3）には、結果のみでなく説明を付けて答えよ。

問 1 三角関数の加法定理を用いて、等式

$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

が成り立つことを示せ。

問 2 $a>4$ とするとき、$f(s) \neq f(t)$ を満たす実数 s, t に対して

$$\{f(s)-f(t)\}\sin\frac{s+t}{2}\sin\frac{s-t}{2} < 0$$

であることを示せ。

問 3 条件

$$f(s) = f(t),\ s-t = \frac{2\pi}{3},\ 0 \leqq t < 2\pi$$

をすべて満たす実数 t の値の和を求めよ。

問1. 加法定理

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$ より

$\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin\alpha\sin\beta$ が求まる。

$\alpha = \frac{x+y}{2}$, $\beta = \frac{x-y}{2}$ を代入すると

左辺 $= \cos\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) - \cos\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)$

$= \cos x - \cos y$

右辺 $= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

となり、与えられた等式と一致する。

問2. $f(s) - f(t)$

$= (a\cos s + \cos 2s) - (a\cos t + \cos 2t)$

$= a(\cos s - \cos t) + (\cos 2s - \cos 2t)$

問1より $\cos s - \cos t = -2\sin\frac{s+t}{2}\sin\frac{s-t}{2}$

$\cos 2s - \cos 2t = -2\sin\frac{2s+2t}{2}\sin\frac{2s-2t}{2}$

$= -8\sin\frac{s+t}{2}\cos\frac{s+t}{2}\sin\frac{s-t}{2}\cos\frac{s-t}{2}$

よって $f(s) - f(t) = -2\sin\frac{s+t}{2}\sin\frac{s-t}{2}\left(a + 4\cos\frac{s+t}{2}\cos\frac{s-t}{2}\right)$

$a + 4\cos\frac{s+t}{2}\cos\frac{s-t}{2}$ を考える

$a > 4$, $\cos\frac{s+t}{2} < 1$, $\cos\frac{s-t}{2} < 1$ より

$a + 4\cos\frac{s+t}{2}\cos\frac{s-t}{2} > 0$

$f(s) - f(t)$ $\sin\frac{s+t}{2}$ $\sin\frac{s-t}{2}$

$= -2\left(\sin\frac{s+t}{2}\sin\frac{s-t}{2}\right)^2\left(a + 4\cos\frac{s+t}{2}\cos\frac{s-t}{2}\right)$

なので、以上をふまえて、これは負となる。

問3. $f(s) = f(t)$ $s - t = \frac{2}{3}\pi$ より

$f(t + \frac{2}{3}\pi) = f(t)$

$a\cos(t + \frac{2}{3}\pi) + \cos(2t + \frac{4}{3}\pi)$

$= a\cos t + \cos 2t$

よって $\cos(t + \frac{2}{3}\pi) = \cos t$ …①

$\cos(2t + \frac{4}{3}\pi) = \cos 2t$ …②

を同時に満たす必要がある。

① を考えると $t = \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi$ $(\because 0 \leqq t < 2\pi)$

② を考えると $t = \frac{1}{6}\pi, \frac{2}{3}\pi, \frac{5}{6}\pi,$

よって $t = \frac{2}{3}\pi$, ゆえに 総和も $\frac{2}{3}\pi$ //

Point

和積の公式

↳ 加法定理から導出できる!

覚えてもいいけど、導出できた方が

忘れたときに安心☺