
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.25
東京大学
文系
数学

第 1 問

座標平面上で，放物線 $C: y = ax^2 + bx + c$ が 2 点 $\mathrm{P}(\cos\theta, \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(-\cos\theta, \sin\theta)$ を通り，点 P と点 Q のそれぞれにおいて円 $x^2 + y^2 = 1$ と共通の接線を持っている。ただし，$0^\circ < \theta < 90^\circ$ とする。

(1) a，b，c を $s = \sin\theta$ を用いて表せ。

(2) 放物線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 A を s を用いて表せ。

(3) $A \geqq \sqrt{3}$ を示せ。

(1) CはP, Qを通るから，

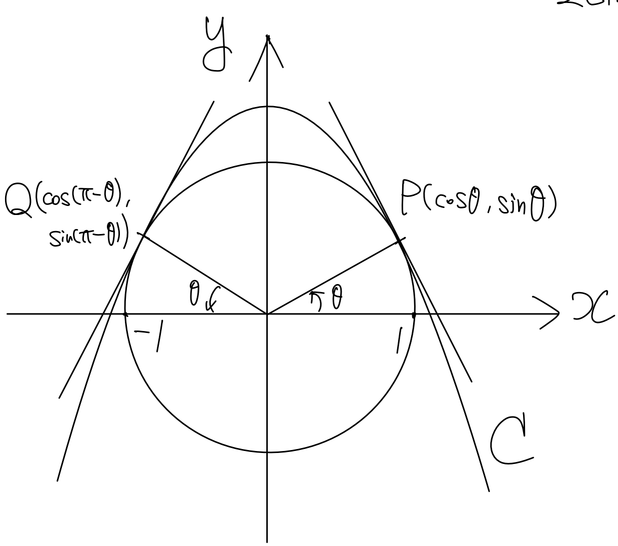
$$\begin{cases} \sin\theta = a\cos^2\theta + b\cos\theta + c \cdots ① \\ \sin\theta = a\cos^2\theta - b\cos\theta + c \end{cases}$$

で，これより $b = 0 \cdots ②$ //

$P(\cos\theta, \sin\theta)$における円の接線の傾きは$-\frac{1}{\tan\theta}$であり，

Cの$x = \cos\theta$における接線の傾きは$2a\cos\theta + b$で，

このことと②から，$a = -\frac{1}{2\sin\theta} = -\frac{1}{2s}$ //



これらと①から，

$c = s - a(1 - s^2)$

$= \frac{s^2 + 1}{2s}$ //

逆にこのとき

題意を満たす(十分である)

(2) C と x 軸の交点は, (1) での結果を用いると,

$x=\pm\sqrt{s^2+1}$ である.

y 軸に関する対称性から,

$$A=2\int_0^{\sqrt{s^2+1}}(ax^2+bx+c)\,dx$$

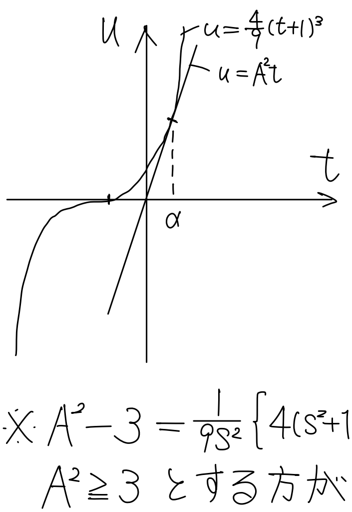
$$=2\left[-\frac{1}{6s}x^3+\frac{s^2+1}{2s}x\right]_0^{\sqrt{s^2+1}}$$

$$=\frac{2}{3s}(s^2+1)^{\frac{3}{2}}$$ //

(3) $0<\theta<90^\circ$ より $0<s$ であることに注意する.

また, $A>0$ より, $A^2=\frac{4}{9}\cdot\frac{(s^2+1)^3}{s^2}$ の最小値を考えればよく,

$s^2=t\,(>0)$ と置きなおして, $\frac{4}{9}(t+1)^3=A^2t$ となるような $t\,(>0)$ が存在するための $A^2(>0)$ の条件を考えればよく,



左下図より $u=\frac{4}{9}(t+1)^3$ と $u=A^2t$ が接するときの A^2 が最小値となる.

接点を $\alpha\,(>0)$ とすると,

$$\begin{cases}\frac{4}{9}(\alpha+1)^3=A^2\alpha\\ \frac{4}{3}(\alpha+1)^2=A^2\end{cases}$$ より, $\alpha+1=3\alpha$, $\alpha=\frac{1}{2}$, $A=3$

∴ A^2 の最小値は 3 なので A の最小値は $\sqrt{3}$

∴ $A\geqq\sqrt{3}$ //

(※ $A^2-3=\frac{1}{9s^2}\{4(s^2+1)^3-27s^2\}=\frac{1}{9s^2}(s^2+4)(2s^2-1)^2\geqq 0$ から
$A^2\geqq 3$ とする方がより楽に解ける.)

第 2 問

以下の問いに答えよ。必要ならば，$0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ であることを用いてよい。

(1) $5^n > 10^{19}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

(2) $5^m + 4^m > 10^{19}$ となる最小の自然数 m を求めよ。

(1) $5^n > 10^{19} > 0$ より

$$5^n > 10^{19} \iff n \log \frac{10}{2} > 19$$

$$\iff n(1-\log_{10} 2) > 19$$

$$\iff n > \frac{19}{1-\log_{10} 2} \quad \cdots ①$$

ここで, $0.3 < \log_{10} 2 < 0.31$ より

$$\frac{19}{0.7} < \frac{19}{1-\log_{10} 2} < \frac{19}{0.69}$$

であり,

$$\frac{19}{0.7} = 27.1\cdots, \quad \frac{19}{0.69} = 27.5\cdots$$

であることから,

$$27.1 < \frac{19}{1-\log_{10} 2} < 27.6$$

である. したがって, ①をみたす最小の n は

$$n = 28$$

である.

(2) $2^{13} = 8192 < 10^4$ より

$$4^{28} = 2^4 \times (2^{13})^4 < 2^4 \times (10^4)^4 = 1.6 \times 10^{17}$$

であることから, $5^{27} < 8 \times 10^{18}$ であれば

$$5^{27} + 4^{27} < 10^{19}$$

であることが言える. ここで,

$$\log_{10} 5^{27} = 27(1-\log_{10} 2)$$

$$< 27 \times 0.7 = 18.9$$

だから,

$$5^{27} < 10^{0.9} \times 10^{18}$$

である. このとき, $2^{10} = 1024 > 10^3$ より

$$10^9 < 2^{30} \quad \therefore \ 10^{0.9} < 2^3 = 8$$

となることより,

$$5^{27} < 8 \times 10^{18}$$

である. 以上より, $5^{27} + 4^{27} < 10^{19}$ であり,

(1)の過程より $5^{28} + 4^{28} > 10^{19}$ であることと合わせて, 求める最小の自然数は,

$$m = 28$$

である.

III

座標平面上に 2 点 O(0, 0), A(0, 1) をとる. x 軸上の 2 点 P(p, 0), Q(q, 0) が, 次の条件 (i), (ii) をともに満たすとする.

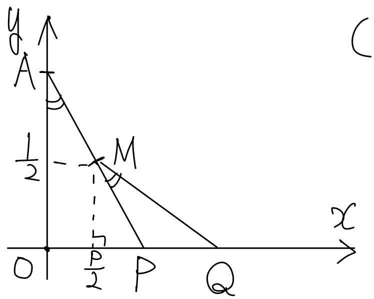
(i) $0 < p < 1$ かつ $p < q$

(ii) 線分 AP の中点を M とするとき, $\angle\mathrm{OAP} = \angle\mathrm{PMQ}$

(1) q を p を用いて表せ.

(2) $q = \dfrac{1}{3}$ となる p の値を求めよ.

(3) $\triangle\mathrm{OAP}$ の面積を S, $\triangle\mathrm{PMQ}$ の面積を T とする. $S > T$ となる p の範囲を求めよ.



(1) $\angle\mathrm{OAP} = \theta$ とおく. ($0 < p < 1$ より $0° < \theta < 45°$)

このとき $p = \tan\theta$ と表せる.

また, $\angle\mathrm{PQM} + \angle\mathrm{PMQ} = \angle\mathrm{OPA} = 90° - \angle\mathrm{OAP}$ より,

$\angle\mathrm{PQM} = 90° - 2\theta$ となるから,

直線 MQ の方程式は, $y = -\tan(90° - 2\theta)\cdot\left(x - \frac{p}{2}\right) + \frac{1}{2}$ で,

これと $y = 0$ の交点を考えて, $q = \dfrac{p}{2} + \dfrac{1}{2\tan(90° - 2\theta)}$

$= \dfrac{p}{2} + \dfrac{1}{2}\cdot\tan 2\theta$

$= \underline{\dfrac{3p - p^3}{2(1 - p^2)}}$ //

(2) $q = \dfrac{1}{3} \Leftrightarrow (p-2)(3p^2+4p-1) = 0 \Leftrightarrow p = 2, \dfrac{-2\pm\sqrt{7}}{3}$ となるも,

このうち $0 < p < 1$ を満たすものは $\underline{p = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}}$ // のみ.

(3) $S = \dfrac{1}{2}p$, $T = \dfrac{1}{2}(q-p)\cdot\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}(q-p)$ より,

$S > T \Leftrightarrow 3p > q \Leftrightarrow p\left(p^2 - \dfrac{3}{5}\right) < 0$

$\Leftrightarrow \underline{0 < p < \dfrac{\sqrt{15}}{5}}$ // $(\because 0 < p < 1)$

第 4 問

n を 5 以上の奇数とする。平面上の点 O を中心とする円をとり，それに内接する正 n 角形を考える。n 個の頂点から異なる 4 点を同時に選ぶ。ただし，どの 4 点も等確率で選ばれるものとする。選んだ 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含む確率 p_n を求めよ。

$n \geqq 7$ とする. n 個の頂点に反時計回りに $P_1, P_2, \ldots, P_n$ とラベルをつける. 4 点を頂点とする四角形が O を内部に含まないことは, ある O を通る直線 ℓ が存在して 4 点が ℓ に関して同じ側にあることと同値である. ℓ で区切られた円弧において, 4 点を反時計回りに A, B, C, D と定める. この定め方は ℓ の取り方には依存せず, 4 点の組に対して一意に定まる. A が P_n であると仮定する.

$k = \frac{n-1}{2}$ とおく. $B = P_b$, $C = P_c$, $D = P_d$ であるとすると, 四角形 $ABCD$ が O を含まないことから $0 < b < c < d \leqq k$ である. このような b, c, d の選び方は ${}_k\mathrm{C}_3$ 通りなので, A の位置が n 通りあることに注意すると求める確率は

$$p_n = 1 - \frac{n {}_k\mathrm{C}_3}{{}_n\mathrm{C}_4} = 1 - \frac{(n-5)}{2(n-2)} = \frac{n+1}{2(n-2)}$$

である.

$n = 5$ のとき, $p_5 = 1$ であり, $n = 5$ のときも $p_n = \dfrac{n+1}{2(n-2)}$ は成り立っている.