
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.25
東京大学
理系
数学

第 1 問

座標空間内の点 A$(0, -1, 1)$ をとる。xy 平面上の点 P が次の条件 (i), (ii), (iii) をすべて満たすとする。

(i) P は 原点 O と異なる。

(ii) $\angle AOP \geqq \frac{2}{3}\pi$

(iii) $\angle OAP \leqq \frac{\pi}{6}$

P がとりうる範囲を xy 平面上に図示せよ。

[1] $P(x, y, 0)$ $\left((x, y) \neq (0, 0)\right)$ とおく。

$$\cos \angle AOP = \frac{2 + x^2 + y^2 - \{x^2 + (y+1)^2 + 1\}}{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= -\frac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\cos \angle OAP = \frac{2 + x^2 + (y+1)^2 + 1 - x^2 - y^2}{2\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}}$$

$$= \frac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}}$$

(ii), (iii) より、

$$\begin{cases} -\dfrac{y}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2}} \leq -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{y+2}{\sqrt{2}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1}} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

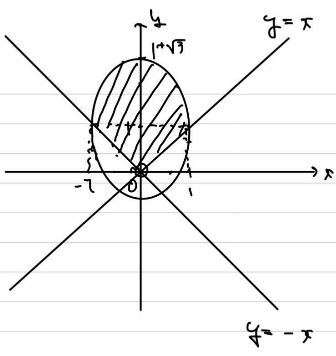
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{x^2+y^2} \\ y+2 \geq \sqrt{\dfrac{3}{2}}\sqrt{x^2+(y+1)^2+1} \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ 2y^2 \geq x^2+y^2 \\ 2(y+2)^2 \geq 3\{x^2+(y+1)^2+1\} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x^2 - y^2 \leq 0 \\ 3x^2+y^2-2y-2 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} y > 0 \\ x^2 - y^2 \leq 0 \\ 3x^2+(y-1)^2 \leq 3 \end{cases}$$

∴ 右の斜線部となる

(ただし境界上, $(x, y) = (0, 0)$ 以外を全て含む。



第 2 問

次の関数 $f(x)$ を考える。

$$f(x)=\int_0^1 \frac{|t-x|}{1+t^2}dt \qquad (0 \leqq x \leqq 1)$$

(1) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を満たす実数 α で，$f'(\tan\alpha)=0$ となるものを求めよ。

(2) (1) で求めた α に対し，$\tan\alpha$ の値を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ の区間 $0 \leqq x \leqq 1$ における最大値と最小値を求めよ。必要ならば，$0.69<\log 2<0.7$ であることを用いてよい。

(1) $\tan x \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$ の逆関数を $\tan^{-1}x$ と表記する.

$g(a,b):=\int_a^b \frac{dt}{1+t^2}$ について，$t=\tan\theta \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおきなおすと,

$g(a,b)=\int_{\tan^{-1}a}^{\tan^{-1}b} d\theta = \tan^{-1}b-\tan^{-1}a$

$h(a,b):=\int_a^b \frac{t}{1+t^2}dt$ について,

$h(a,b)=\frac{1}{2}\int_a^b \frac{(1+t^2)'}{1+t^2}dt=\frac{1}{2}\cdot\left[\log(1+t^2)\right]_a^b=\frac{1}{2}\left\{\log(1+b^2)-\log(1+a^2)\right\}$

以上を踏まえ，$f(x)=\int_0^x \frac{x-t}{1+t^2}dt+\int_x^1 \frac{t-x}{1+t^2}dt$

$=x\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}-\int_0^x \frac{t}{1+t^2}dt+\int_x^1 \frac{t}{1+t^2}dt-x\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2}$

$=x\cdot g(0,x)-h(0,x)+h(x,1)-x\cdot g(x,1)$ で,

$=x\cdot\tan^{-1}x-\frac{1}{2}\log(1+x^2)+\frac{1}{2}\log 2-\frac{1}{2}\log(1+x^2)-\frac{\pi}{4}x+x\cdot\tan^{-1}x$

$f'(x)=2\left(\tan^{-1}x+\frac{x}{1+x^2}\right)-\frac{2x}{1+x^2}-\frac{\pi}{4}=2\tan^{-1}x-\frac{\pi}{4}$ で,

$x=\tan\alpha$ と置くと $f'(\tan\alpha)=2\alpha-\frac{\pi}{4}$ だから，$\underline{\alpha=\frac{\pi}{8}}$ // とすれば $f'(\tan\alpha)=0$ となる.

(2) $\tan\frac{\pi}{8}=t$ とおくと，加法定理より $\frac{2t}{1-t^2}=1 \Leftrightarrow t=-1\pm\sqrt{2}$，ここで,

$t=\tan\frac{\pi}{8}>0$ であるので，$\tan\frac{\pi}{8}=\underline{\sqrt{2}-1}$ //

(3) f の $0 \leqq x \leqq 1$ における増減表は以下の通り.

x	0	$\cdots$	$\tan\frac{\pi}{8}$	$\cdots$	1
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

従って, 最小値は

$$f\left(\tan\frac{\pi}{8}\right) = 2\cdot\frac{\pi}{8}\cdot\tan\frac{\pi}{8} - \log\left(1+\tan^2\frac{\pi}{8}\right) - \frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\log 2$$
$$= \frac{1}{2}\log 2 - \log(4-2\sqrt{2})$$
$$= \log(\sqrt{2}+1) - \log 2$$

最大値は $\max\{f(0), -(1)\}$ であり,

$$f(0) = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} = h(0,1) = \frac{1}{2}\log 2$$
$$f(1) = \int_0^1 \frac{1-t}{1+t^2}\,dt = g(0,1) - h(0,1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$$ で,

$f(1) - f(0) = \frac{\pi}{4} - \log 2 > \frac{3}{4} - 0.7 > 0$ ($\because \pi > 3$ かつ $\log 2 < 0.7$) であるから,

$\max\{f(0), f(1)\} = f(1) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$

$\therefore$ 最大値 $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log 2$, 最小値 $\log(\sqrt{2}+1) - \log 2$ //

第 3 問

座標平面上を次の規則 (i), (ii) に従って 1 秒ごとに動く点 P を考える。

(i) 最初に，P は点 $(2,1)$ にいる。

(ii) ある時刻で P が点 (a,b) にいるとき，その 1 秒後には点 P は
- 確率 $\frac{1}{3}$ で x 軸に関して (a,b) と対称な点
- 確率 $\frac{1}{3}$ で y 軸に関して (a,b) と対称な点
- 確率 $\frac{1}{3}$ で直線 $y=x$ に関して (a,b) と対称な点
- 確率 $\frac{1}{3}$ で直線 $y=-x$ に関して (a,b) と対称な点

にいる。

以下の問いに答えよ。ただし，(1) については，結論のみを書けばよい。

(1) P がとりうる点の座標を全て求めよ。

$(2,1)$, $(1,2)$, $(-1,2)$, $(-2,1)$, $(-2,-1)$, $(-1,-2)$, $(1,-2)$, $(2,-1)$

(2) n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が $(2,1)$ にいる確率と，最初から n 秒後に P が $(-2,-1)$ にいる確率は等しいことを示せ。

A$(2,1)$, B$(1,2)$, C$(-1,2)$, D$(-2,1)$, E$(-2,-1)$, F$(-1,-2)$, G$(1,-2)$, H$(2,-1)$ とする．n 秒後に P が A, B, C, D, E, F, G, H にいる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n, g_n, h_n とする．

$n \geqq 1$ のとき $a_n = e_n$, $b_n = f_n$, $c_n = g_n$, $d_n = h_n$ であることを示す．$m \geqq 0$ に対して，

$$a_{m+1} = \frac{1}{6}b_m + \frac{1}{3}d_m + \frac{1}{6}f_m + \frac{1}{3}h_m$$
$$e_{m+1} = \frac{1}{6}b_m + \frac{1}{3}d_m + \frac{1}{6}f_m + \frac{1}{3}h_m$$

であるため, $n \geqq 1$ に対して $a_n = e_n$ である．他の 3 式も同様に示すことができる．

(3) n を正の整数とする。最初から n 秒後に P が $(2,1)$ にいる確率を求めよ。

a_n を求めればよい．(2) の結果を用いると,

$$b_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{6}e_n + \frac{1}{3}g_n = \frac{1}{3}a_n + \frac{2}{3}c_n$$
$$d_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{6}c_n + \frac{1}{3}e_n + \frac{1}{6}g_n = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n$$

$$a_{n+2} = \frac{1}{6}b_{n+1} + \frac{1}{3}d_{n+1} + \frac{1}{6}f_{n+1} + \frac{1}{3}h_{n+1} = \frac{1}{3}b_{n+1} + \frac{2}{3}d_{n+1} = \frac{5}{9}a_n + \frac{4}{9}c_n$$
$$c_{n+2} = \frac{1}{3}b_{n+1} + \frac{1}{6}d_{n+1} + \frac{1}{3}f_{n+1} + \frac{1}{6}h_{n+1} = \frac{2}{3}b_{n+1} + \frac{1}{3}d_{n+1} = \frac{4}{9}a_n + \frac{5}{9}c_n$$

が成り立つ．

ここで, $a_1 = c_1 = 0$ より, 任意の奇数 n に対して $a_n = c_n = 0$ であり, $a_2 = \frac{5}{18}$, $c_2 = \frac{2}{9}$ より, 正の偶数 n に対して $a_n = \dfrac{1+3^{-n}}{4}$, $c_n = \dfrac{1-3^{-n}}{4}$ である．

よって, 求める確率は $\begin{cases} \dfrac{1+3^{-n}}{4} & n \text{ が偶数,} \\ 0 & n \text{ が奇数.} \end{cases}$

第 4 問

$f(x) = -\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2 + 4\sqrt{2}$ とおく。$0 < t < 4$ を満たす実数 t に対し，座標平面上の点 $(t, f(t))$ を通り，この点において放物線 $y = f(x)$ と共通の接線を持ち，x 軸上に中心を持つ円を C_t とする。

(1) 円 C_t の中心の座標を $(c(t), 0)$, 半径を $r(t)$ とおく。$c(t)$ と $\{r(t)\}^2$ を t の整式で表せ。

円の中心は $(t, f(t))$ における放物線の法線上にある．この点における接線の傾きが $-\frac{t}{\sqrt{2}}$ であることから,

$$c(t) = t - \frac{t}{\sqrt{2}}f(t) = \frac{1}{4}t^3 - 3t$$

である．また,

$$r(t)^2 = (t - c(t))^2 + f(t)^2 = \left(1 + \frac{t^2}{2}\right)f(t)^2 = \frac{1}{16}t^6 - \frac{15}{8}t^4 + 12t^2 + 32$$

である．

(2) 実数 a は $0 < a < f(3)$ を満たすとする。円 C_t が点 $(3, a)$ を通るような実数 t は $0 < t < 4$ の範囲にいくつあるか。

$f(3) = \frac{7}{2\sqrt{2}}$ である．まず,

$$\text{円 } C_t \text{ が } (3, a) \text{ を通る} \iff (3 - c(t))^2 + a^2 = r(t)^2 \iff a^2 = -\frac{3}{8}t^4 + \frac{3}{2}t^3 + 3t^2 - 18t + 23$$

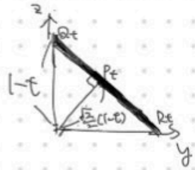
である．$g(t) = -\frac{3}{8}t^4 + \frac{3}{2}t^3 + 3t^2 - 18t + 23$ とおくと，$\frac{d}{dt}g(t) = -\frac{3}{2}t^3 + \frac{9}{2}t^2 + 6t - 18 = -\frac{3}{2}(t-3)(t-2)(t+2)$ である．これより, $g(t)$ は $g(0) = 23$, $0 < t < 2$ で単調減少, $t = 2$ で極小値 5, $2 < t < 3$ で単調増加, $t = 3$ で極大値 $\frac{49}{8} = f(3)^2$, $3 < t < 4$ で単調減少, $g(4) = 0$ となる．

これより, $a^2 = -\frac{3}{8}t^4 + \frac{3}{2}t^3 + 3t^2 - 18t + 23$ の $0 < t < 4$ をみたす解の個数は $\sqrt{5} < a < f(3)$ で 3 個, $a = \sqrt{5}$ で 2 個, $0 < a < \sqrt{5}$ で 1 個となる．

第 5 問

座標空間内に 3 点 A (1, 0, 0), B (0, 1, 0), C (0, 0, 1) をとり，D を線分 AC の中点とする。三角形 ABD の周および内部を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。

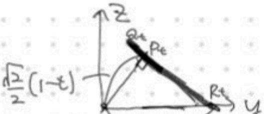
$x=t$での△ABDの断面を考える. 断面の端点をy座標が小さい順にQ_t, R_tとする.



$\left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right)$

Q_tR_tの長さをlとすると、

$$l = \begin{cases} \sqrt{2}(1-t) & \left(\frac{1}{2} \leq t \leq 1\right) \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{t}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}t & \left(0 \leq t \leq \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$



$\left(\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{2}\right)$

$x=t$での断面において，点$(t,0,0)$から直線Q_tR_tへの垂線の足をP_tとする。

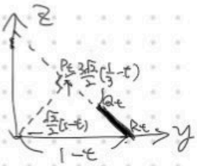
線分Q_tR_tがP_tを含む $\Longleftrightarrow l \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t)$である.

$\sqrt{2}(1-t) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t) \Longleftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \geq \frac{\sqrt{2}}{2}t \Longleftrightarrow 1 \geq t$より

$\frac{1}{2} \leq t \leq 1$のとき$Q_tR_t$は$P_t$を含む、

$\sqrt{2}t \geq \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t) \Longleftrightarrow \frac{3\sqrt{2}}{2}t \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \Longleftrightarrow t \geq \frac{1}{3}$より

$\frac{1}{3} \leq t \leq \frac{1}{2}$のとき$Q_tR_t$が$P_t$を含む



$\left(0 \leq t \leq \frac{1}{3}\right)$

$0 \leq t \leq \frac{1}{3}$のとき$Q_tR_t$は$P_t$を含まず,

$|P_tQ_t| = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-t) - \sqrt{2}t = \frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{3}-t\right)$

これより断面図は左上図のようになり回転体の体積は

$$\int_{\frac{1}{3}}^{1} \pi \left\{(1-x)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)\right)^2\right\} dx$$

$$+\int_0^{\frac{1}{3}} \left[(1-x)^2 - \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1-x)\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{3}-x\right)\right)^2\right\}\right] dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{3}(1-x)^3\right]_0^1 - \frac{9}{2}\pi\left[-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}-x\right)^3\right]_0^{\frac{1}{3}}$$

$$= \frac{\pi}{6} - \frac{1}{18}\pi = \frac{\pi}{9}$$

第 6 問

2 以上の整数で，1 とそれ自身以外に正の約数を持たない数を素数という。以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=x^3+10x^2+20x$ とする。$f(n)$ が素数となるような整数 n をすべて求めよ。

(2) a，b を整数の定数とし，$g(x)=x^3+ax^2+bx$ とする。$g(n)$ が素数となるような整数 n の個数は 3 個以下であることを示せ。

(1) $f(x)=x(x^2+10x+20)$ であるので $f(n)$ が素数であるためには

$|n|=1$ または $|n^2+10n+20|=1$ が必要。

$n^2+10n+20=1$ のとき $n=-5\pm\sqrt{6}$ より不適

$n^2+10n+20=-1$ のとき $n=-3,-7$

$f(-3)=3$, $f(-7)=7$ より $n=-3,-7$ は条件を満たす。

$n=1$ のとき $f(1)=31$ より条件を満たす。

$n=-1$ のとき $f(-1)=-11$ より条件を満たさない。

よって $n=-3,-7,1$ //

(2) $g(x)=x(x^2+ax+b)$ より $g(n)$ が素数であるためには

$|n|=1$

$n^2+an+b=1$ かつ n は素数

$n^2+an+b=-1$ かつ $-n$ は素数

のいずれかが必要

ここで $p^2+ap+b=1$ を満たす素数 p と

$(-q)^2+a(-q)+b=1$ を満たす素数 q が同時に存在したとする。

このとき解と係数の関係より $p(-a-p)=b-1$

$(-q)(-a+q)=b+1$

よって $(-q)(-a+q)-p(-a-p)=2$

$(p+q)(a+p-q)=2$

ここで $p+q$, $a+p-q$ は整数かつ $p+q\geq 4$ より

これを満たす p, q は存在しない。

よって $|n|\neq1$ かつ $g(n)$ が素数であるような整数 n は

高々2個しか存在しない。もし2個存在したならば

それらを n_1, n_2 とおくと

・$n_1\geq2$, $n_2\geq2$, $n_1+n_2=-a$, $n_1n_2=b-1$

・$n_1\leq-2$, $n_2\leq-2$, $n_1+n_2=-a$, $n_1n_2=b+1$

の一方が必ず成立する。

このとき $-a+b+1\geq n_1n_2+n_1+n_2=(n_1+1)(n_2+1)-1\geq0$ なので

$g(-1)=a-b-1\leq0$ となり，$g(-1)$ は素数でない。

よって $g(n)$ が素数となるのは高々 $1, n_1, n_2$ の3つである。

また，$|n|\neq1$ かつ $g(n)$ が素数であるような整数 n が

1個以下であるならば，$n=\pm1$ と合わせて

$g(n)$ が素数となる整数 n は3個以下である。

以上より示された。■