
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.25
一橋大学
数学

$\boxed{1}$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k(n-2k)=2024$ を満たす正の整数の組 $(m,\ n)$ を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{m} k(n-2k) = n\sum_{k=1}^{m} k - 2\sum_{k=1}^{m} k^2$$

$$= n\cdot\frac{m(m+1)}{2} - 2\cdot\frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

$$= \frac{m(m+1)}{6}\{3n-2(2m+1)\}$$ であるから,

$$\sum_{k=1}^{m} k(n-2k) = 2024 \iff m(m+1)(3n-4m-2) = 6\cdot 2024$$

$$\iff m(m+1)(3n-4m-2) = 2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23 \cdots ①$$

$m>0$ とこれより $3n-4m+2>0$ が従うので,

$m, m+1, 3n-4m+2$ のいずれも $2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$ の正の約数である.

そして, $m, m+1$ は連続する2整数なので, 一方は奇数であり,

$2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$ の正の約数のうち奇数であるものは,

$1, 3, 11, 23, 33, 69, 253, 759$ のみであるので, $m$ と $m+1$ の一方はこれらのうちの1つと一致する.

これと, $m^2 < m(m+1)(3n-4m-2) = 2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23 < 111^2$ より $m \leqq 110$ であり, さらに $10, 32, 34, 68, 70$ は $2^4\cdot 3\cdot 11\cdot 23$ の正の約数でないことに注意すれば,

$m = 1, 2, 3, 11, 22, 23$ が必要となる.

(i) $m=1$ のとき $n=2026$ となり適.

(ii) $m=2$ のとき $n=678$ となり適.

(iii) $m=3$ のとき $n=342$ となり適.

(iv) $m=11$ のとき $n=46$ となり適.

(v) $m=22$ のとき $n=38$ となり適.

(vi) $m=23$ のとき $n=\frac{116}{3}$ となり適.

∴ 以上より $(m, n) = (1, 2026), (2, 678), (3, 342), (11, 46), (22, 38)$ //

2 　$a, b$ を実数とする。曲線 $C : y = x^2$ と曲線 $C' : y = -x^2 + ax + b$ はある点を共有しており，その点におけるそれぞれの接線は直交している。$C$ と $C'$ で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。

一橋

2 $\begin{cases} y = x^2 & \text{—①} \\ y = -x^2 + ax + b & \text{—②} \end{cases}$

①−②： $2x^2 - ax - b = 0$
　の解の1つを $\alpha$ とする。

①，②は，$\begin{cases} y' = 2x \\ y' = -2x + a \end{cases}$ 　ゆえ，$2\alpha(-2\alpha + a) = -1$

$\alpha \neq 0$ で，
$a = 2\alpha - \frac{1}{2\alpha}$

$b = 2\alpha^2 - 2\alpha^2 + \frac{1}{2}$
$= \frac{1}{2}$

①−②の2解を $\alpha_1, \alpha_2$ とする。$(\alpha_1 < \alpha_2)$

よって，$S = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} (-2x^2 + ax + b)\,dx$

$= \frac{1}{3}(\alpha_2 - \alpha_1)^3$

$\{(\alpha_2 - \alpha_1)^2\}^{\frac{3}{2}} = \{(\frac{a}{2})^2 + 2b\}^{\frac{3}{2}} = (\frac{1}{4}a^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \geq 1$
(a＝0で等号成立)

∴ $(a, b) = (0, \frac{1}{2})$ のとき $S$ の最小値は $\frac{1}{3}$ //

3 $f(x)$ は $x$ に関する 4 次多項式で 4 次の係数は 1 である。$f(x)$ は $(x+1)^2$ で割ると 1 余り，$(x-1)^2$ で割ると 2 余る。$f(x)$ を求めよ。

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ とする。

$f(x)=(x-1)^2P_1(x)+2$ の形で表されるので

$f'(x)=(x-1)P_2(x)$ の形で表される

よって $f(1)=a+b+c+d+1=2$

$f'(1)=3a+2b+c+4=0$

$f(x)=(x+1)^2Q_1(x)+1$ の形で表されるので

$f'(x)=(x+1)Q_2(x)$ の形で表される。

よって $f(-1)=-a+b-c+d+1=1$

$f'(-1)=3a-2b+c-4=0$

これらを連立して解くと $(a,b,c,d)=\left(-\frac{1}{4},-2,\frac{3}{4},\frac{5}{2}\right)$

よって $f(x)=x^4-\frac{1}{4}x^3-2x^2+\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}$

**4** 実数 $a$, $b$ は $-1<a<1$, $-1<b<1$ を満たす。座標空間内に4点 $A(a,\ -1,\ -1)$, $B(-1,\ b,\ -1)$, $C(-a,\ 1,\ 1)$, $D(1,\ -b,\ 1)$ をとる。

(1) A, B, C, D がひし形の頂点となるとき，$a$ と $b$ の関係を表す等式を求めよ。

(2) $a$, $b$ が (1) の等式を満たすとき，A, B, C, D を頂点とする四角形の面積の最小値を求めよ。

$\boxed{4}$ (1) 対角線が直交し.各辺の長さが等しければよい

$$\overrightarrow{AC} = (-2a,\ 2,\ 2)$$
$$\overrightarrow{BD} = (2,\ -2b,\ 2)$$

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD} = 0 \iff -4a-4b+4=0 \iff a+b=1$ …(答)

このとき $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CD}|$ となり.ひし形である

(2) ひし形の面積を $S(a)$ とする.

$$S(a) = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BD}|$$
$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{a^2+2}\cdot 2\sqrt{a^2-2a+3}$$
$$= 2\sqrt{a^4-2a^3+5a^2-4a+6}$$

$f(a) = a^4-2a^3+5a^2-4a+6$ とし，$f(a)$ の最小値を考える.

$a=1-b$ と $-1<b<1$ より $0<a<1$ に注意して.

$$f'(a) = 4a^3-6a^2+10a-4$$
$$= 2(2a^3-3a^2+5a-2)$$
$$= 2(2a-1)(a^2-a+2)$$

| $a$ | $(0)$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $(1)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(a)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f(a)$ | | $\searrow$ | $\frac{81}{16}$ | $\nearrow$ | |

以上より $f(a)$ の最小値は $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{81}{16}$

よって求める最小値は $S\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}$ …(答)

第 5 問

$n$ を 3 以上の奇数とする。円に内接する正 $n$ 角形の頂点から無作為に相異なる 3 点を選んだとき，その 3 点を頂点とする三角形の内部に円の中心が含まれる確率 $p_n$ を求めよ。

$n \geqq 5$ とする．$n$ 個の頂点に反時計回りに $P_1, P_2, \ldots, P_n$ とラベルをつける．3 点を頂点とする三角形が円の中心を内部に含まないことは, ある中心を通る直線 $\ell$ が存在して 3 点が $\ell$ に関して同じ側にあることと同値である．$\ell$ で区切られた円弧において, 3 点を反時計回りに $A$, $B$, $C$ と定める．この定め方は $\ell$ の取り方には依存せず, 3 点の組に対して一意に定まる．$A$ が $P_n$ であると仮定する．

$k = \frac{n-1}{2}$ とおく．$B = P_b$, $C = P_c$ であるとすると, 三角形 $ABC$ が $O$ を含まないことから $0 < b < c \leqq k$ である．このような $b$, $c$ の選び方は ${}_k\mathrm{C}_2$ 通りなので, $A$ の位置が $n$ 通りあることに注意すると求める確率は

$$p_n = 1 - \frac{n {}_k\mathrm{C}_2}{{}_n\mathrm{C}_3} = 1 - \frac{3(n-3)}{4(n-2)} = \frac{n+1}{4(n-2)}$$

である．

$n = 3$ のとき, $p_3 = 1$ であり, $n = 3$ のときも $p_n = \dfrac{n+1}{4(n-2)}$ は成り立っている．