
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.25
京都大学
文系
数学

$\boxed{1}$ (30 点)

四面体 OABC が次を満たすとする．

$$OA = OB = OC = 1,\ \angle COA = \angle COB = \angle ACB,\ \angle AOB = 90^\circ$$

このとき，四面体 OABC の体積を求めよ．

$\boxed{1}$ $\angle AOB = 90^\circ$ より $AB = \sqrt{2}$

また，$\triangle COA \equiv \triangle COB$ であるので $BC = CA$

また，$\triangle COA$ および $\triangle ABC$ は いずれも頂角の大きさの等しい二等辺三角形であるので

$\triangle COA \sim \triangle BCA$

相似比より $1 : CA = CA : \sqrt{2}$ $\therefore\ BC = CA = 2^{\frac{1}{4}}$

O から $\triangle ABC$ に下ろした垂線の足を H とする．H は $\triangle ABC$ の外心である．

$\cos\angle ACB = \dfrac{AC^2 + BC^2 - AB^2}{2 \cdot AC \cdot BC} = \dfrac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ より，$\sin\angle ACB = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}}$，

$AH = \dfrac{AB}{2\sin\angle ACB} = \sqrt{\dfrac{1}{2\sqrt{2}-1}}$，$OH = \sqrt{OA^2 - AH^2} = \sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-1}}$ だから，

O−ABC の体積は，$\dfrac{1}{3} \cdot \underbrace{\dfrac{1}{2} \cdot \left(2^{\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}-1}{2}}}_{= |\triangle ABC|} \cdot \sqrt{\dfrac{2\sqrt{2}-2}{2\sqrt{2}-1}} = \underline{\dfrac{\sqrt{2\sqrt{2}-2}}{6}}$ //

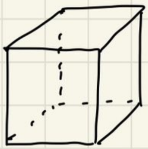
2 (30点)

n 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_3 を求めよ．

(2) p_4 を求めよ．

$\boxed{2}$ (1) 全事象は 3^6 通り



立方体の向かいあう面をそれぞれ同じ色で塗ることになる
例えば底面の色を決めると，側面は交互に残り2つの色を塗ることになり，上面は底面の色と同じになる

よって，条件を満たす塗り方は $\underbrace{3}_{\text{底面}} \times \underbrace{2}_{\text{側面}} = 6$ 通り

よって，$P_3 = \dfrac{6}{3^6} = \dfrac{2}{243}$ …(答)

(2) 全事象は 4^6 通り

(i) 3色で全て塗る場合

どの3色で塗るかが 4通り，なので (1)と合わせて $4 \times 6 = 24$ 通り

(ii) 4色全て使う場合

(ア) 側面が2色の場合

底面を決め，側面をぬる2色を決めると自動的に上面は決まるので

$\underbrace{4}_{\text{底面}} \times \underbrace{{}_3C_2}_{\text{側面}} \times \underbrace{2}_{\text{側面の塗り方}} = 24$ 通り

(イ) 側面が3色の場合

側面で2回使う色は向かいあう．
底面を決めたのちの側面のぬり分け方は．

$\underbrace{3}_{\text{向かいあう色}} \times \underbrace{2}_{\text{向かいあい方}} \times \underbrace{2}_{\text{あまりのぬり方}} = 12$

底面とあわせて $4 \times 12 = 48$ 通り (上面は自動で決まる)

以上より

$P_4 = \dfrac{24+24+48}{4^6} = \dfrac{3}{128}$ …(答)

$\boxed{3}$

aは正の定数とする．次の関数の最大値を求めよ．

$$f(x)=\left|x^2-\left(ax+\frac{3}{4}a^2\right)\right|+ax+\frac{3}{4}a^2 \quad (-1\leqq x\leqq 1)$$

$\boxed{3}$ $x^2-ax-\frac{3}{4}a^2\geqq 0 \iff \left(x-\frac{3}{2}a\right)\left(x+\frac{1}{2}a\right)\geqq 0$

$\iff x\leqq -\frac{1}{2}a,\ \frac{3}{2}a\leqq x$

よって．$f(x)=\begin{cases} x^2 & \left(x\leqq -\frac{1}{2}a,\ \frac{3}{2}a\leqq x\right) \\ -(x-a)^2+\frac{5}{2}a^2 & \left(-\frac{1}{2}a\leqq x\leqq \frac{3}{2}a\right)\end{cases}$

(i) $-\frac{1}{2}a\leqq -1 \iff a\geqq 2$ のとき

このとき．$f(x)=-x^2+2ax+\frac{3}{2}a^2$

$=-(x-a)^2+\frac{5}{2}a^2 \quad (-1\leqq x\leqq 1)$ より

最大値を $M(a)$ とすれば $M(a)=f(1)=\frac{3}{2}a^2+2a-1$

(ii) $-1\leqq -\frac{1}{2}a$ かつ $1\leqq \frac{3}{2}a \iff \frac{2}{3}\leqq a\leqq 2$ のとき

$f(x)=\begin{cases} x^2 & \left(-1\leqq x\leqq -\frac{1}{2}a\right) \\ -x^2+2ax+\frac{3}{2}a^2 & \left(-\frac{1}{2}a\leqq x\leqq 1\right)\end{cases}$

(ア) $1\leqq a\leqq 2$ のとき

最大となりうるのは．$f(-1)=1$ と $f(1)=\frac{3}{2}a^2+2a-1$

$\frac{3}{2}a^2+2a-2\geqq 0 \iff \frac{2}{3}\leqq a$ より $M(a)=\frac{3}{2}a^2+2a-1$

(イ) $\frac{2}{3}\leqq a\leqq 1$ のとき

最大となりうるのは $f(-1)=1$ と $f(a)=\frac{5}{2}a^2$

$\frac{5}{2}a^2-1\geqq 0 \iff \sqrt{\frac{2}{5}}\leqq a$

$\sqrt{\frac{2}{5}}\leqq \frac{2}{3}$ であるから $M(a)=\frac{5}{2}a^2$

(iii) $\frac{3}{2}a\leqq 1 \iff a\leqq \frac{2}{3}$ のとき

$f(x)=\begin{cases} x^2 & \left(-1\leqq x\leqq -\frac{1}{2}a,\ \frac{3}{2}a\leqq x\leqq 1\right) \\ -x^2+2ax+\frac{3}{2}a^2 & \left(-\frac{1}{2}a\leqq x\leqq \frac{3}{2}a\right)\end{cases}$

最大となりうるのは $f(-1)=f(1)=1$ と $f(a)=\frac{5}{2}a^2$ だが (ii)(イ) の過程より

$M(a)=\begin{cases} 1 & \left(0<a\leqq \sqrt{\frac{2}{5}}\right) \\ \frac{5}{2}a^2 & \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\leqq a\leqq \frac{2}{3}\right)\end{cases}$

以上 (i)〜(iii) をまとめて

$$M(a)=\begin{cases} 1 & \left(0<a\leqq \sqrt{\frac{2}{5}}\right) \\ \frac{5}{2}a^2 & \left(\sqrt{\frac{2}{5}}\leqq a\leqq 1\right) \\ \frac{3}{2}a^2+2a-1 & (1\leqq a)\end{cases}$$

…(答)

4 (30 点)

ある自然数を八進法，九進法，十進法でそれぞれ表したとき，桁数がすべて同じになった．このような自然数で最大のものを求めよ．ただし，必要なら次を用いてもよい．

$$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011,\ 0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$$

$\boxed{4}$ ある自然数をAとし，その桁数をnとすると

$$\begin{cases} 8^{n-1} \leqq A < 8^n \\ 9^{n-1} \leqq A < 9^n \\ 10^{n-1} \leqq A < 10^n \end{cases} \Leftrightarrow \quad 10^{n-1} \leqq A < 8^n$$

$$\Leftrightarrow \quad n-1 \leqq \log_{10} A < 3n\log_{10} 2$$

まず，(♡)を満たす $\log_{10} A$ の存在条件より

$$3n\log_{10}2 - n + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1-3\log_{10}2)n < 1$$

$$\Leftrightarrow \quad n < \frac{1}{1-3\log_{10}2}$$

ここで，$10.3 < \dfrac{1}{1-3\log_{10}2} < 10.4$ より n のとりうる最大値は 10 である．

そして，$10^{n-1} \leqq A < 8^n$ を満たすことから，Aはnに関して単調増加．

ゆえに $n=10$ のときに題意を満たすAが存在するなら，$n \leqq 9$ なる題意を満たすAについては考える必要はない．

$n=10$ のとき，$A < 8^{10}$ となることから，$A \leqq 8^{10}-1$ である．

逆に，$A = 8^{10}-1$ が $A \geqq 10^9$ を満たすことを示せば，これが求めるAであり，これは，

$8^{10}-1 = (2^{10})^3 - 1 = (1024)^3 - 1 > (10^3+1)^3 - 1 \geqq 10^9$ より成立するので，

$\underline{A = 8^{10}-1}$ //

$\boxed{5}$

関数 $y = x^2 - 4x + 5$ のグラフの $x > 1$ の部分を C とする。このとき，下の条件を満たすような正の実数 a, b について，座標平面の点 (a, b) が動く領域の面積を求めよ。

「C と直線 $y = ax + b$ は二つの異なる共有点を持つ」

$\boxed{5}$ 条件 $\Leftrightarrow$ $x^2 - 4x + 5 = ax + b$ が $x > 1$ に異なる2実数解をもつ …(♡)

$f(x) = x^2 - (4+a)x + 5 - b$ とすると.

(♡)が成立する条件は.

2次方程式 $x^2 - (4+a)x + 5 - b = 0$ の判別式を D として.

(i) $D > 0 \Leftrightarrow (4+a)^2 - 4(5-b) > 0$

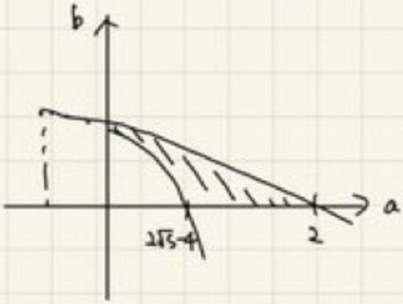
$\Leftrightarrow \quad b > -\frac{1}{4}(a+4)^2 + 5$

(ii) 軸 $> 1 \Leftrightarrow \frac{4+a}{2} > 1$

$\Leftrightarrow \quad a > -2$

(iii) $f(1) > 0 \Leftrightarrow -a + 2 > b$

以上 (i)〜(iii) と $a, b > 0$ を図示して.領域は下図斜線部(境界含まない)



よって.求める面積は

$$S = \frac{1}{2} \times (2 - 2\sqrt{5} + 4) \times (-2\sqrt{5} + 6) + \int_0^{2\sqrt{5}-4} \left\{ -x + 2 + \frac{1}{4}(x+4)^2 - 5 \right\} dx$$

$$= \frac{50 - 20\sqrt{5}}{3} \quad \cdots (答)$$