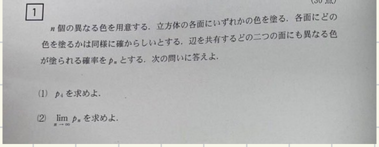

ゴウカライズ
解答速報
2024.2.25
京都大学
理系
数学


1

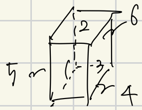
n 個の異なる色を用意する．立方体の各面にいずれかの色を塗る．各面にどの色を塗るかは同様に確からしいとする．辺を共有するどの二つの面にも異なる色が塗られる確率を p_n とする．次の問いに答えよ．

(1) p_4 を求めよ．

(2) $\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ．

[1].

(1) 4つの色をA.B.C.Dとする。また、この立方体の6つの面に1〜6の番号を以下のようにふる



このように各面に区別をつけることにより

全ての色のぬり方の場合の数は 4^6 通り

またこの場合全てにおける確率は同様に確からしいので、これをもとに場合の数の観点から条件を満たす場合の数を考える。

①. 1色しか使わない場合.

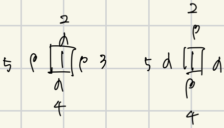
となりあう色は全て同じ色

よって 0 通り

② 2色しか使わないとき

使う2色を α, β とする

1番から周りの色を見ていくと



のようになってしまい 2〜4の部分で不適だが

1が α, β どちらでも不成立である。

よって 0 通り

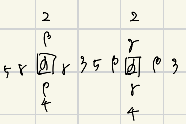
③ 3色を使うとき

使う3色を α, β, γ とする

まず1に使った色以外の色を2〜5では

使う必要があり、その時(※)のように、2つの色を対面に存在するペアとして配置するという方法をとる。

この時、1を α とすると



他の β, γ が1の時も考えると

α, β, γ による場合の数は $3\times2=6$ 通り

α, β, γ の選び方は ${}_4C_3=4$ 通り

かけ算をして $6\times4=24$ 通り

④ 4色を用いるとき

1における色を χ とする。そして残った三色を α, β, γ

とする。この時2つの色のぬり方がある。

I) 2色を2〜5に用い(※)のようなぬり方を行う

II) 1つの色を対面にペアとしてぬり、残った2色をあまった場所にそれぞれぬる

I) の場合、③で行ったようにひとつの2色のペアにつき2通りが考えられ

6番には残った一色を用いる

まず χ の色を選ぶのに 4通り

2〜5にぬる色で ${}_3C_2=3$ 通り

2〜5のぬり方で 2通り

$4\times3\times2=24$ 通り

II) の場合、対面にぬる色の場合で3通り。またこれを2,5にぬるか

3,4にぬるかで2通り。残った2つに2色をぬる方法で2通り。

6は1と同じ色である。χ の選び方で4通り

$4\times3\times2\times2=48$ 通り

よって合計して $\dfrac{48+24+24}{4^6}=\dfrac{96}{4^6}=\dfrac{3}{2^7}=\dfrac{3}{128}$

(2) まず、6色まったく違う色をぬるときに異なる色をぬる保証はない。

(1)と同じように考えると、6色違う色をぬる場合の数は1〜6に順にぬっていくので

$(n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$ 通りである。全体は n^6 通りである。

よって $p_n \geqq \dfrac{(n)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^6}$

$p_n \leqq 1$ である(確率は1を超えることはない)

$\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{n^6} \leqq p_n \leqq 1$

左辺は $(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})(1-\frac{3}{n})(1-\frac{4}{n})(1-\frac{5}{n})$ となり $n\to\infty$ だと

$1\times1\times1\times1\times1=1$ となる。右辺も $n\to\infty$ では1 はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty} p_n = 1$

2 (30点)

$|x| \leqq 2$ を満たす複素数 x と，$|y-(8+6i)|=3$ を満たす複素数 y に対して，$z=\dfrac{x+y}{2}$ とする．このような複素数 z が複素数平面において動く領域を図示し，その面積を求めよ．

東大

② $y-(8+6i)=w$ とする。

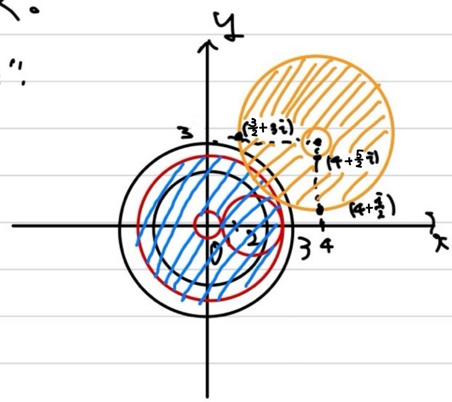
$$z=\frac{x+w}{2}+4+3i$$

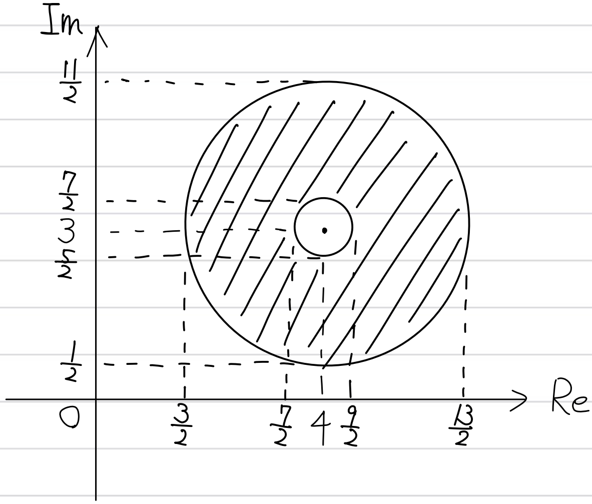
$|x|\leqq 2$，$|w|=3$ を動く。

青のドーナツ状の図形が $\frac{x+w}{2}$ で，平行移動した黄が求める図形となり，

面積は，$\pi\cdot\left(\frac{5^2}{2^2}-\frac{1}{2^2}\right)$

$=6\pi$





(図示)
左図の斜線部，ただし境界上全て含む。

3. $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$とおく。

すると

$\overrightarrow{OX} = x\vec{c}$

$\overrightarrow{BY} = y(\vec{c}-\vec{b})$

$\overrightarrow{OY} = y(\vec{c}-\vec{b})+\vec{b}$

$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$

と表すことができる

直線 QY上の点をSとする。すると、この直線上の点は媒介変数 s を用いて

$$\overrightarrow{OS} = \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) + s\left\{ y(\vec{c}-\vec{b}) + \vec{b} - \frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}) \right\}$$

直線 PX上の点Tは媒介変数tを用いて

$$\overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}\vec{a} + t\left(x\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}\right)$$

(※)

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$は一次独立であること、またO.A.B.Cは同一平面上にないために、OABCはそれぞれ異なった点であることに注意すると、二つの直線について

「$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$について係数比較した時 s, tの解が存在しない。」場合、二つの直線は平行またはねじれである。
(交わりがない、ということである。)

係数を比較して

$\vec{a}$について　$\frac{1}{2} - \frac{t}{2} = \frac{1}{2} - \frac{s}{2}$ ―①

$\vec{b}$について　$0 = \frac{1}{2} + s\left(\frac{1}{2} - y\right)$ ―②

$\vec{c}$について　$tx = sy$ ―③

①について、s, tが存在するなら s=tである。また s=t=0の時 ②が不成立であることを考慮して $x = y$である。また $y = \frac{1}{2}$の時、sはどの値でも②を満たさない

つまり s, tが存在しない条件は $y = \frac{1}{2}$の時 または $x \neq y$の時である。

しかし、ここから方向ベクトルが平行の場合を除かないといけない

QYの方向ベクトルは　$y(\vec{c}-\vec{b}) + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

PXの方向ベクトルは　$x\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a}$

(※)に注目すると PXに $\vec{b}$ベクトル係数が入っていないので QYベクトルでも $\vec{b}$係数が0 よって $y = \frac{1}{2}$. 係数を比較して $x = \frac{1}{2}$の時成立 $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$の時は除外

よって $y = \frac{1}{2}$のときまたは $x \neq y$の時にねじれをつくる。

そして $x = y = \frac{1}{2}$の時にはねじれを形成しない。

2つの条件を組み合わせて

$x \neq y$である

3 (30点)

座標空間の4点O, A, B, Cは同一平面上にないとする. 線分OAの中点をP, 線分ABの中点をQとする. 実数x, yに対して, 直線OC上の点Xと, 直線BC上の点Yを次のように定める.

$$\overrightarrow{OX} = x\,\overrightarrow{OC}, \qquad \overrightarrow{BY} = y\,\overrightarrow{BC}$$

このとき, 直線QYと直線PXがねじれの位置にあるためのx, yに関する必要十分条件を求めよ.

④

$a_0 \sim a_k$ (kは自然数) について、この全てが奇数であるような最小の自然数を考える。$0 \leqq n \leqq k-1$ について

$a_{n+1} = \frac{3a_n+1}{2}$ の関係があるので $a_{n+1} > a_n$ である

また $2a_{n+1} = 3a_n + 1$

$a_n = \frac{1}{3}(2a_{n+1}-1)$ である。

ここで $a_0\ a_1 \cdots a_k$ を $b_k\ b_{k-1} \cdots b_0$ という数列として考える。すると

$b_{n+1} = \frac{1}{3}(2b_n - 1)$

$(b_{n+1}+1) = \frac{2}{3}(b_n+1)$

$b_n+1 = \left(\frac{2}{3}\right)^n(b_0+1)$

$b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n(b_0+1)-1$ である。このことから $b_k = \left(\frac{2}{3}\right)^k(b_0+1)-1$

というように $b_k(a_0)$ は b_0 の関数として単調増加(線形)である。

よって最小の b_0 を求めればよいことになる。$b_0 \sim b_k$ について

$b_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n(b_0+1)-1$ がすべて自然数かつ奇数であるという条件は満たさなければいけない。$b_0 \sim b_k$ は自然数のとき $b_{n+1} = \frac{2b_n-1}{3}$ より (b_0) が奇数であれば b_1 は奇数であり、($2b_n-1$ は奇数で3も奇数より) これを b_k までくり返して $b_0 \sim b_k$ は奇数であることが分かる。つぎに $b_0 \sim b_k$ が自然数である条件を考える

b_0 が自然数であるためには b_0 は自然数である必要がある

b_1 〃 $\frac{2}{3}(b_0+1)-1$ 〃

b_2 〃 $\left(\frac{2}{3}\right)^2(b_0+1)-1$ 〃

⋮

b_k 〃 $\left(\frac{2}{3}\right)^k(b_0+1)-1$ 〃

である。つまり (b_0+1) は 3^k でわりきれる必要がある。

これを満たす最小の自然数は…

$b_0 = 3^k - 1$ は不適…偶数になってしまう

$b_0 = 2\times 3^k - 1$ のとき…成立

$b_k = 2^{k+1}-1$ が考えられる最小の自然数になる

(1) $k=3$ より $\underline{15}$

(2) $k=10$ より $2^{11}-1 = \underline{2047}$

4 (30点)

与えられた自然数 a_0 に対して、自然数からなる数列 $a_0, a_1, a_2, \cdots$ を次のように定める。

$$a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n}{2} & (a_n \text{が偶数のとき}) \\ \dfrac{3a_n+1}{2} & (a_n \text{が奇数のとき}) \end{cases}$$

次の問いに答えよ。

(1) a_0, a_1, a_2, a_3 がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。

(2) $a_0, a_1, \cdots, a_{10}$ がすべて奇数であるような最小の自然数 a_0 を求めよ。

5 (40 点)

a は $a \geqq 1$ を満たす定数とする．座標平面上で，次の 4 つの不等式が表す領域を D_a とする．

$$x \geqq 0,\quad \frac{e^x - e^{-x}}{2} \leqq y,\quad y \leqq \frac{e^x + e^{-x}}{2},\quad y \leqq a$$

次の問いに答えよ．

(1) D_a の面積 S_a を求めよ．

(2) $\displaystyle\lim_{a \to \infty} S_a$ を求めよ．

5 $a = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$ と $a = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$ の $x \geqq 0$ における解をそれぞれ α, β とする。(これらは一意に定まる。)

(1)
$$D_a = \int_0^{\alpha} \frac{e^x + e^{-x}}{2}\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} a\,dx - \int_0^{\beta} \frac{e^x - e^{-x}}{2}\,dx$$
$$= \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2} + a(\beta - \alpha) - \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} + 1$$
$$= 1 + \frac{1}{2}\left(e^{\alpha} - \frac{1}{e^{\alpha}}\right) - \frac{1}{2}\left(e^{\beta} + \frac{1}{e^{\beta}}\right) + a(\beta - \alpha)$$

$$\begin{cases} (e^{\alpha})^2 - 2ae^{\alpha} + 1 = 0 \\ (e^{\beta})^2 - 2ae^{\beta} - 1 = 0 \end{cases}$$
$e^{\alpha} = a + \sqrt{a^2 - 1}$ $(\because \alpha \geqq 0)$
$e^{\beta} = a + \sqrt{a^2 + 1}$

$$\therefore S_a = \underline{1 + \sqrt{a^2-1} - \sqrt{a^2+1} + a \log \frac{a + \sqrt{a^2+1}}{a + \sqrt{a^2-1}}}\ //$$

(2)
$$\lim_{a\to\infty}\left(\sqrt{a^2-1} - \sqrt{a^2+1}\right) = \lim_{a\to\infty} -2 \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2-1} + \sqrt{a^2+1}} = 0$$ かつ,
$$\lim_{a\to\infty} a \log \frac{a + \sqrt{a^2+1}}{a + \sqrt{a^2-1}} = \lim_{b\to+0} \frac{1}{b} \cdot \log \frac{1 + \sqrt{1+b^2}}{1 + \sqrt{1-b^2}}$$ ($\frac{1}{a} = b$ とおいた)

ここで, $f(x) = \log \dfrac{1 + \sqrt{1+x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}}$ とおくと, このとき $f(0) = 0$ であり,

$$f'(x) = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{1 + \sqrt{1-x^2}} \cdot \frac{1}{(1 + \sqrt{1-x^2})^2} \left\{ \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}} \cdot (1 + \sqrt{1-x^2}) + (1 + \sqrt{1+x^2}) \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} \right\}$$

これより $f'(0) = 0$ であり, $\displaystyle\lim_{a\to\infty} a \log \frac{a + \sqrt{a^2+1}}{a + \sqrt{a^2-1}} = \lim_{b\to+0} \frac{f(b) - f(0)}{b - 0} = f'(0) = 0$

$$\therefore \lim_{a\to\infty} S_a = \underline{1}\ //$$

6 (40点)

自然数 k に対して，$a_k = 2^{\sqrt{k}}$ とする．n を自然数とし，a_k の整数部分が n 桁であるような k の個数を N_n とする．また，a_k の整数部分が n 桁であり，その最高位の数字が 1 であるような k の個数を L_n とする．次を求めよ．

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n}$$

ただし，例えば実数 2345.678 の整数部分 2345 は 4 桁で，最高位の数字は 2 である．

このページで終わりである。

$\boxed{6}$ a_k の整数部分が n 桁 $\iff 10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 10^n$

$$\iff n-1 \leqq \sqrt{k}\log_{10}2 < n$$

$$\iff \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 \leqq k < \left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2$$

よって． $N_n = \left[\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right]$ （$[x]$ は x を超えない最大整数）

a_k の整数部が n 桁かつ最高位が 1． $\iff 10^{n-1} \leqq 2^{\sqrt{k}} < 2\cdot 10^{n-1}$

$$\iff n-1 \leqq \sqrt{k}\log_{10}2 < (n-1)+\log_{10}2$$

$$\iff \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 \leqq k < \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2$$

よって． $L_n = \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2\right] - \left[\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2\right]$

一般に， $x-1 < [x] \leqq x$ が成り立つので．

$$\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 - 1 < N_n < \left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 + 1$$

$$\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 - 1 \leqq L_n < \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 + 1$$

$$\therefore \frac{\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 + 1} < \frac{L_n}{N_n} < \frac{\left(\frac{n-1}{\log_{10}2}+1\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 + 1}{\left(\frac{n}{\log_{10}2}\right)^2 - \left(\frac{n-1}{\log_{10}2}\right)^2 - 1} \quad \cdots (♡)$$

$$(♡の最左辺) = \frac{2(n-1)\log_{10}2}{2n-1+(\log_{10}2)^2} \to \log_{10}2 \quad (n\to\infty)$$

$$(♡の最右辺) = \frac{2(n-1)\log_{10}2 + 2(\log_{10}2)^2}{2n-1-(\log_{10}2)^2} \to \log_{10}2 \quad (n\to\infty)$$

よって．はさみうちの原理より， $\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{N_n} = \log_{10}2$ …(答)