
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.25
東京医科歯科大学
数学

大問 1

n を 2 以上の自然数とする。自然数の組 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ を解とする方程式

$$(\ast)\quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1 \times a_2 \times \cdots \times a_n$$

を考えるとき，以下の各問いに答えよ。

(1) $n = 3$ のとき，$(\ast)$ の解のうち $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ を満たすものを全て求めよ。

$3a_3 \geqq a_1 + a_2 + a_3 = a_1a_2a_3$ より $a_1a_2 \leqq 3$ である．これより，$(a_1, a_2) = (1, 1), (1, 2), (1, 3)$ である．これらを $(\ast)$ に代入して a_3 を求めると，$(a_1, a_2) = (1, 1)$ では解なし，$(a_1, a_2) = (1, 2)$ では $a_3 = 2$，$(a_1, a_2) = (1, 3)$ では $a_3 = 2$ となって $a_2 \leqq a_3$ に矛盾する．これより，$(\ast)$ の解のうち $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ をみたすものは $(a_1, a_2, a_3) = (1, 2, 3)$ のみである．

(2) $n \leqq 3$ のとき，$(\ast)$ の任意の解 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ において，$a_i = 1$ となる i が少なくとも 1 つ存在することを示せ。

$(\ast)$ は $a_1, a_2, \cdots, a_n$ について対称な式なので $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ を仮定して問題ない．

$$na_n \geqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1a_2 \cdots a_n \geqq (a_1)^{n-1}a_n$$

より $(a_1)^{n-1} \leqq n$ である．$n \geqq 3$ のとき $2^{n-1} > n$ なので $a_1 = 1$ が導かれる．これより，$a_i = 1$ となる i は少なくとも 1 つ存在する．

(3) $(\ast)$ のある解 $(a_1, a_2, \cdots, a_n)$ において，$a_i = 1$ となる i がちょうど 2 個存在しているとする。このとき，n の取り得る値を全て求めよ。

(2) と同様に $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ を仮定する．条件から $a_1 = a_2 = 1$ で $a_3 \geqq 2$ である．

$$na_n \geqq a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1a_2 \cdots a_n \geqq a_1a_2(a_3)^{n-3}a_n \geqq 2^{n-3}a_n$$

より $2^{n-3} \leqq n$ が得られるがこれをみたすのは $n \leqq 5$ のときのみである．

(a) $n = 2$ のとき条件から $a_1 = a_2 = 1$ が必要だがこれは $(\ast)$ の解とはならない．

(b) $n = 3$ のとき (1) で求めたように，$a_1 = a_2 = 1$ となる解は存在しない．

(c) $n = 4$ のとき $(a_1, a_2, a_3, a_4) = (1, 1, 2, 4)$ は解であり条件をみたす．

(d) $n = 5$ のとき $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = (1, 1, 2, 2, 2)$ は解であり条件をみたす．

以上より，n の取り得る値は $4, 5$ である．

$N(0, s, 1-s)$

2 xyz 空間において、点 $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(-1, 0, 0)$, $D(0, 0, 1)$ をとり、線分 CD の中点を M とする。さらに、N を線分 BD 上の点とする。また、z 軸と平行でない直線上の異なる2点 $P(x, y, z)$, $Q(x', y', z')$ に対して、

$$\frac{z'-z}{\sqrt{(x'-x)^2+(y'-y)^2}}$$

をベクトル $\overrightarrow{PQ}$ の勾配と呼ぶ。$\overrightarrow{AN}$ の勾配を t_1、$\overrightarrow{NM}$ の勾配を t_2 とするとき、以下の各問いに答えよ。

(1) $t_2 = 0$ となるように N をとったとき、t_1 の値を求めよ。

(2) $l = |\overrightarrow{AN}| + |\overrightarrow{NM}|$ とし、l が最小となるように N をとったとき、l の値を求めよ。

(3) $0 \leqq t_2 \leqq t_1$ となるように N をとったとき、N の y 座標を s とする。s がとり得る値の範囲を求めよ。

(1) $t_2=0$ より NとMのz座標は等しい。Mの座標は $\left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$ であるので
Nの座標は $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ であり、

$$t_1 = \frac{\frac{1}{2}-0}{\sqrt{(0-1)^2+\left(\frac{1}{2}-0\right)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

(2) Nの座標を $(0, y, 1-y)$ とする。
$A'(1, -1, 1)$ をとると
$|\overrightarrow{AN}|^2 = 1^2+y^2+(1-y)^2$
$|\overrightarrow{A'N}|^2 = 1^2+(1-y)^2+y^2$ より $|\overrightarrow{AN}| = |\overrightarrow{A'N}|$ なので

$$l = |\overrightarrow{A'N}| + |\overrightarrow{NM}| \geqq |\overrightarrow{A'M}| = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+1^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

一方 $y=\frac{1}{3}$ としたとき
$|\overrightarrow{AN}|^2 = 1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{14}{9}$
$|\overrightarrow{NM}|^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{14}{36}$ より $l = \frac{\sqrt{14}}{3}+\frac{\sqrt{14}}{6} = \frac{\sqrt{14}}{2}$ なので
l の最小値は $\frac{\sqrt{14}}{2}$

(3) Nの座標は $(0, s, 1-s)$ (ただし $0 \leqq s \leqq 1$) なので

$$t_1 = \frac{1-s}{\sqrt{1^2+s^2}} = \frac{1-s}{\sqrt{1+s^2}}$$

$$t_2 = \frac{\frac{1}{2}-(1-s)}{\sqrt{\frac{1}{2}^2+s^2}} = \frac{2s-1}{\sqrt{1+4s^2}} \quad \text{よって}$$

$$\begin{aligned}
0 \leqq t_2 \leqq t_1 &\iff 0 \leqq t_2 \text{ かつ } t_2^2 \leqq t_1^2 \\
&\iff \frac{2s-1}{\sqrt{1+4s^2}} \geqq 0 \text{ かつ } \frac{(1-s)^2}{1+s^2} \geqq \frac{(2s-1)^2}{1+4s^2} \\
&\iff s \geqq \frac{1}{2} \text{ かつ } 1-\frac{2s}{1+s^2} \geqq 1-\frac{4s}{1+4s^2} \\
&\iff s \geqq \frac{1}{2} \text{ かつ } 4s(1+s^2) \geqq 2s(1+4s^2) \\
&\iff s \geqq \frac{1}{2} \text{ かつ } 2s^2+2 \geqq 4s^2+1 \\
&\iff s \geqq \frac{1}{2} \text{ かつ } 1 \geqq 2s^2 \\
&\iff \frac{1}{\sqrt{2}} \geqq s \geqq \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

したがって求める範囲は $\frac{1}{2} \leqq s \leqq \frac{1}{\sqrt{2}}$

3 $f(x)$ を連続関数とするとき，次の各問いに答えよ。

(1) 次の等式を示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx$$

(2) 次の等式を示せ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x + \cos x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(1-t^2)\,dt$$

(3) 次の定積分の値を求めよ。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}}\,dx$$

(1)

$x = \frac{\pi}{2} - t$ とおく。

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\sin x\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(\sin(\pi-2t))\cos t\,(-dt)$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2t)\cos t\,dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)\cos x\,dx \quad ■$$

(2)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin 2x)(\sin x + \cos x)\,dx \quad —— (*)$$

$\sin x - \cos x = t$ とおく。

$$\begin{cases} (\sin x + \cos x)\,dx = dt \\ \sin 2x = 1 - t^2 \end{cases}$$ より、 $(*) = \int_{-1}^{1} f(1-t^2)\,dt$ となる。

(3)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sqrt{\sin 2x}}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{1+\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos\theta}{1+\cos\theta}\,d\theta$$

$\tan\frac{\theta}{2} = t$ とおく。 $\frac{2}{1+t^2}dt = d\theta$, $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ より

$$= \int_0^1 \frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2}\,dt = 2\int_0^1 \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2+1-t^4}\,dt = \int_0^1 \frac{1-t^2}{1+t^2}\,dt$$

$$= 2\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt - 1 = 2\cdot\frac{\pi}{4} - 1 = \frac{\pi}{2} - 1$$