
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.25
北海道大学
文系
数学

1 次の問に答えよ。

(1) 自然数 m, n について，$2^m \cdot 3^n$ の正の約数の個数を求めよ。

(2) 6912 の正の約数のうち，12 で割り切れないものの総和を求めよ。

(1) 2と3は互いに素であるので，$(m+1)(n+1)$ 個

(2) $6912 = 2^8 \cdot 3^3$ であるので，6912の正の約数のうち12の倍数であるものは，$2^a \cdot 3^b$（ただし a, b は $2 \leqq a \leqq 8$，$1 \leqq b \leqq 3$ を満たす整数）と表せるので，

これらの和は $(2^2+2^3+\cdots+2^8)(3^1+3^2+3^3) = 508 \cdot 39 = 19812$ であり，

6912の正の約数の総和は $(2^0+2^1+\cdots+2^8)(3^0+3^1+\cdots+3^3) = 20440$

であるから，求める総和は $20440 - 19812 = 628$

☆ポイント
・正の約数の個数，正の約数の総和の考え方の応用

2 次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ について考える。

$$a_1 = 3, \qquad a_{n+1} = 3a_n - \frac{3^{n+1}}{n(n+1)} \quad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{3^n}$ とおくとき，b_{n+1} を b_n と n の式で表せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

☆ポイント
階差数列の利用，$n=1$ に注意

(1) 与漸化式の両辺を $3^{n+1} (>0)$ で割ると，

$$b_{n+1} = b_n - \frac{1}{n(n+1)}$$ を得る。

(2) $b_1 = \dfrac{a_1}{3} = 1$ であり，(1)の結果から，

$n \geqq 2$ において $b_n = b_1 + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(b_{k+1} - b_k) = 1 - \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{n}$ と

なり，これと $b_1 = 1$ より $b_n = \dfrac{1}{n}$ が $n \geqq 1$ で成立する。

$\therefore a_n = 3^n \cdot b_n = \dfrac{3^n}{n}$

3 a を 0 でない実数とする。C を $y=-x^3+x^2$ で表される曲線，ℓ を $y=a$ で表される直線とし，C と ℓ は共有点をちょうど 2 つもつとする。

(1) a の値を求めよ。

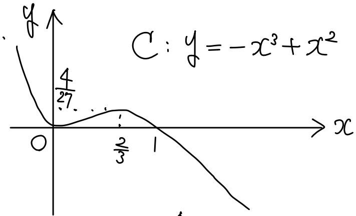
(2) C と ℓ の共有点の x 座標をすべて求めよ。

(3) C と ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) $y=-x^3+x^2$ の両辺を x で微分して，$y'=-3x^2+2x=-3\left(x-\frac{2}{3}\right)x$ であるので

C の増減表と概形は以下の通り。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$



従って，これと $y=a\ (a\neq 0)$ が接するとき，$\underline{a=\frac{4}{27}}$ //

(2) $C: y=-x^3+x^2$ と $\ell: y=\frac{4}{27}$ を連立して，

$-x^3+x^2=\frac{4}{27} \iff \left(x-\frac{2}{3}\right)^2\left(x+\frac{1}{3}\right)=0$ となるので，$\underline{x=-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}}$ //

(3) 求める面積は，

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}\left\{\frac{4}{27}-(-x^3+x^2)\right\}dx=\left[\frac{4}{27}x+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{3}x^3\right]_{-\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}}=\underline{\frac{1}{12}}\ //$$

（別解：$\frac{1}{12}$ 公式より $\frac{1}{12}\left\{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{3}\right)\right\}^4=\underline{\frac{1}{12}}$ // としても良い。）

［※ポイント
三次関数の概形把握］

4 各面に1つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある。「1」,「2」,「3」が書かれた面がそれぞれ1つずつあり，残りの5つの面には「0」が書かれている。このさいころを水平な床面に投げて，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える。最初の持ち点は0とし，この試行を繰り返す。例えば，3回の試行を行ったとき，出た面に書かれた数が「0」,「2」,「3」であれば，持ち点は5となる。なお，さいころが水平な床面にあるとき，さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ。また，さいころを投げるとき，各面が出ることは同様に確からしいとする。

(1) この試行を2回行ったとき，持ち点が1である確率を求めよ。

(2) この試行を4回行ったとき，持ち点が10以下である確率を求めよ。

(1) 持ち点が1となるには「0」が書かれた面と「1」が書かれた面が1回ずつ出るしかなく，その確率について，「0」，「1」，「2」，「3」が出る確率はそれぞれ $\frac{5}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{8}$ だから，
求める確率は，$2\cdot\left(\frac{5}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{8}\right)=\underline{\frac{5}{32}}$ //

(2) 持ち点が11以上となるには以下の①，②の場合しかない：
①「2」が書かれた面が1回，「3」が書かれた面が3回出る
②「3」が書かれた面が4回出る

∴このときの確率は $4\cdot\left(\frac{1}{8}\right)\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^3+\left(\frac{1}{8}\right)^4=\frac{5}{4096}$

∴求める確率は $\underline{\frac{4091}{4096}}$ //

☆ポイント
条件の整理