
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.25
北海道大学
理系
数学

北海道大学　理系

1 t を実数とし，xy 平面上の点 $P(\cos 2t, \cos t)$ および点 $Q(\sin t, \sin 2t)$ を考える。

(1) 点 P と点 Q が一致するような t の値をすべて求めよ。

(2) t が $0 < t < 2\pi$ の範囲で変化するとき，点 P の軌跡を xy 平面上に図示せよ。ただし，x 軸，y 軸との共有点がある場合は，それらの座標を求め，図中に記せ。

$\boxed{1}$ (1) $\begin{cases} \cos 2t = \sin t & \cdots ① \\ \cos t = \sin 2t & \cdots ② \end{cases}$

① $\Leftrightarrow$ $2\sin^2 t + \sin t - 1 = 0$

$\Leftrightarrow$ $(2\sin t - 1)(\sin t + 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\sin t = \frac{1}{2}, -1$ $\cdots (*)$

② $\Leftrightarrow$ $\cos t(2\sin t - 1) = 0$

$\Leftrightarrow$ $\cos t = 0$ または $\sin t = \frac{1}{2}$ $\cdots (**)$

$(*)$ と $(**)$ を同時に満たす t を考えれば

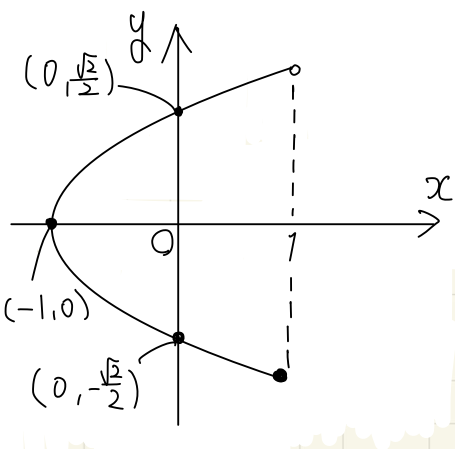
$t = \frac{\pi}{6} + 2n\pi, \frac{5}{6}\pi + 2n\pi, \frac{3}{2}\pi + 2n\pi$ (n:整数) …(答)

(2) $\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \cos t \end{cases}$ とおくと，$x = 2y^2 - 1$ で，

このとき x は y の関数であり，$0 < t < 2\pi$ のとき

$-1 \leqq y < 1$ であるから，P の軌跡は以下のようになる．

(ただし白丸は含まない)



2 各面に1つずつ数が書かれた正八面体のさいころがある。「1」,「2」,「3」が書かれた面がそれぞれ1つずつあり，残りの5つの面には「0」が書かれている。このさいころを水平な床面に投げて，出た面に書かれた数を持ち点に加えるという試行を考える。最初の持ち点は0とし，この試行を繰り返す。例えば，3回の試行を行ったとき，出た面に書かれた数が「0」,「2」,「3」であれば，持ち点は5となる。なお，さいころが水平な床面にあるとき，さいころの上部の水平な面を出た面とよぶ。また，さいころを投げるとき，各面が出ることは同様に確からしいとする。

(1) この試行を n 回行ったとき，持ち点が2以下である確率を求めよ。ただし，n は2以上の自然数とする。

(2) この試行を4回行って持ち点が10以上であったときに，さらにこの試行を2回行って持ち点が17以上である条件付き確率を求めよ。

(1) 持ち点が2以下になるのは

- 0がn回出る
- 1が1回, 0が$n-1$回出る.
- 2が1回, 0が$n-1$回出る.
- 1が2回, 0が$n-2$回出る

のいずれかの場合であるので.

求める確率は

$$\left(\frac{5}{8}\right)^n + {}_nC_1\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{8}\right) + {}_nC_1\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}\left(\frac{1}{8}\right) + {}_nC_2\left(\frac{5}{8}\right)^{n-2}\left(\frac{1}{8}\right)^n$$

$$= \frac{n^2+19n+50}{128}\left(\frac{5}{8}\right)^{n-2}$$

(2) 持ち点が10以上になるのは

(i) 3が4回出る.

(ii) 3が3回, 2が1回出る.

(iii) 3が2回, 2が2回出る

(iv) 3が3回, 1が1回出る

のいずれかである.

(i)の起こる確率は $\left(\frac{1}{8}\right)^4$ であり,

このとき残り2つの出目が $(2,3)$, $(3,2)$, $(3,3)$ のいずれかである場合のみ最終的な持ち点が17点以上となる

このときの確率は $\left(\frac{1}{8}\right)^4 \times 3\left(\frac{1}{8}\right)^2 = 3\left(\frac{1}{8}\right)^6$

(ii)の起こる確率は ${}_4C_1\left(\frac{1}{8}\right)^4$ であり,

このとき残り2つの出目が $(3,3)$ である場合のみ最終的な持ち点が17点以上となる. このときの確率は ${}_4C_1\left(\frac{1}{8}\right)^4 \times \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 4\left(\frac{1}{8}\right)^6$

(iii)の起こる確率は ${}_4C_2\left(\frac{1}{8}\right)^4$, (iv)の起こる確率は ${}_4C_1\left(\frac{1}{8}\right)^4$ であり,

このときどのような出目が出ても, 最終的な持ち点は17点以上にならない.

以上より求める確率は

$$\frac{3\left(\frac{1}{8}\right)^6 + 4\left(\frac{1}{8}\right)^6}{\left(\frac{1}{8}\right)^4 + {}_4C_1\left(\frac{1}{8}\right)^4 + {}_4C_2\left(\frac{1}{8}\right)^4 + {}_4C_1\left(\frac{1}{8}\right)^4} = \frac{7}{960}$$

$\boxed{3}$ 次の問に答えよ。

(1) α を実数とする。次のように定められた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_1 = \alpha, \qquad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + 1 \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

(2) 関数 $f_1(x), f_2(x), f_3(x), \cdots\cdots$ を次の関係式で定める。

$$f_1(x) = 3x$$

$$f_{n+1}(x) = (n+2)x^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t)\,dt\right)x \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$$

関数 $f_n(x)$ を x と n の式で表せ。

(1) $a_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}(a_n - 2)$

$\therefore a_n - 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\alpha - 2)$

$a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}(\alpha - 2) + 2$

(2) $\int_0^1 f_{n+1}(t)dt = \int_0^1 \left\{(n+2)s^{n+1} + \left(\int_0^1 f_n(t)dt\right)s\right\} ds$

$= 1 + \frac{1}{2}\int_0^1 f_n(t)dt$

$\int_0^1 f_n(t)dt = a_n$ とおく。 $a_1 = \frac{3}{2}$ で、(1)の結果を用いると、

$\alpha = \frac{3}{2}$ として、

$a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$

$n \geqq 2$ において, $f_n(x) = (n+1)x^n + \left\{2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}x$ D

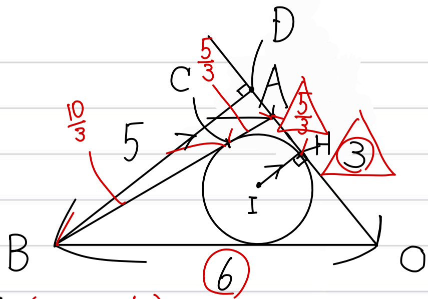
(これは $n=1$ においても成立している)

4 三角形 OAB が，$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{AB}|=5$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=10$ をみたしているとする。三角形 OAB の内接円の中心を I とし，この内接円と辺 OA の接点を H とする。

(1) 辺 OB の長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{OI}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{HI}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。



(1) $|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2$

$\Longleftrightarrow\quad 25=|\overrightarrow{OB}|^2-20+9$

$|\overrightarrow{OB}|=\underline{6}$ //

(2) $\overrightarrow{OC}=\dfrac{2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{3}$ (○の比)

$\overrightarrow{OI}=\dfrac{3}{3+5\times\frac{1}{3}}\overrightarrow{OC}=\underline{\dfrac{3}{14}(2\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})}$ // (△の比)

(3) $\overrightarrow{OH}=\dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OI}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}=\dfrac{\frac{3}{7}|\overrightarrow{OA}|^2+\frac{3}{14}\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|^2}\overrightarrow{OA}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ より，

$\overrightarrow{HI}=\overrightarrow{OI}-\overrightarrow{OH}=\underline{\dfrac{3}{14}\overrightarrow{OB}-\dfrac{5}{21}\overrightarrow{OA}}$ //

5 関数

$$f(x) = x\log(x+2) + 1 \qquad (x > -2)$$

を考える。$y = f(x)$ で表される曲線を C とする。C の接線のうち傾きが正で原点を通るものを ℓ とする。ただし，$\log t$ は t の自然対数である。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 曲線 C は下に凸であることを証明せよ。

(3) C と ℓ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

$\boxed{5}$ $f'(x) = \log(x+2) + \dfrac{x}{x+2}$

(1) 接点を $(t, f(t))$ $(t > -2)$ とおくと

$\ell : y = \left\{\log(t+2) + \dfrac{t}{t+2}\right\}(x-t) + t\log(t+2) + 1$ とできる

これが原点を通るから

$$0 = -t\log(t+2) - \frac{t^2}{t+2} + t\log(t+2) + 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-t^2+t+2}{t+2} = 0$$

$\Leftrightarrow (t-2)(t+1) = 0$ $\quad t = 2, -1$

傾きが正より $f'(t) > 0$ が必要であるが

$f'(2) = 2\log 2 + \dfrac{1}{2} > 0$ $\quad f'(-1) = -1 < 0$ だから $t = 2$

よって. $\ell : y = \left(2\log 2 + \dfrac{1}{2}\right)x$ $\cdots$(答)

(2) $x > -2$ で $f''(x) > 0$ を示せばよい $\cdots$(♡)

$$f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{2}{(x+2)^2} > 0 \quad (x > -2)$$

よって (♡) が成立するので題意は示せた ∎

(3) 求める面積を S とすると (1)(2) の過程より

$S = \displaystyle\int_0^2 \left\{x\log(x+2) + 1 - \left(2\log 2 + \frac{1}{2}\right)x\right\}dx$ とでき、

$$\int_0^2 x\log(x+2)\,dx = \int_0^2 \{(x+2)\log(x+2) - 2\log(x+2)\}dx$$

$$\int_0^2 (x+2)\log(x+2)\,dx = \left[\frac{(x+2)^2}{2}\log(x+2)\right]_0^2 - \frac{1}{2}\int_0^2 (x+2)\,dx$$

$$= 14\log 2 - 3$$

$$\int_0^2 \log(x+2)\,dx = \Big[(x+2)\log(x+2)\Big]_0^2 - \int_0^2 dx$$

$$= 6\log 2 - 2$$

$$\int_0^2 \left\{1 - \left(2\log 2 + \frac{1}{2}\right)x\right\}dx = \left[x - \left(2\log 2 + \frac{1}{2}\right)\frac{x^2}{2}\right]_0^2$$

$$= 1 - 4\log 2$$

以上より，$S = (14\log 2 - 3) - 2(6\log 2 - 2) + (1 - 4\log 2)$

$= 2 - 2\log 2$ $\cdots$(答)