
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.25
大阪大学
文系
数学

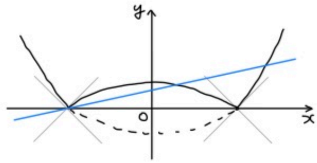
**I**

曲線 $y=|x^2-1|$ を $C$, 直線 $y=2a(x+1)$ を $l$ とする. ただし, $a$ は $0<a<1$ を満たす実数とする.

(1) 曲線 $C$ と直線 $l$ の共有点の座標をすべて求めよ.

(2) 曲線 $C$ と直線 $l$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなる $a$ の値を求めよ.

(1)




$$y=\begin{cases} x^2-1 & (x<-1,\ 1<x) & \cdots C_1 \\ -x^2+1 & (-1\leqq x\leqq 1) & \cdots C_2 \end{cases}$$

・ $l$ と $C_1$ との共有点は

$$\begin{cases} y=2a(x+1) & \cdots ① \\ y=x^2-1 & \cdots ② \\ x<-1,\ 1<x & \cdots ③ \end{cases}$$

をみたす解によるもので, ①, ②より

$$x^2-2ax-2a-1=0$$

$$(x+1)(x-2a-1)=0$$

$x=-1$ を解にもつ!

$0<a<1$ より $2a+1>1$ ゆえ, $x=2a+1$ は

③をみたすので, $l$ と $C_1$ との共有点は,

$$(2a+1,\ 4a(a+1))$$

・ $l$ と $C_2$ との共有点は

$$\begin{cases} y=2a(x+1) & \cdots ① \\ y=-x^2+1 & \cdots ④ \\ -1\leqq x\leqq 1 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

をみたす解によるもので, ①, ④より

$$x^2+2ax+2a-1=0$$

$$(x+1)(x+2a-1)=0$$

$0<a<1$ より $-1<-2a+1<1$ ゆえ, $x=-2a+1$ は

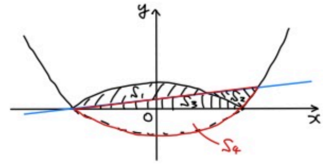
⑤をみたすので, $l$ と $C_2$ との $(-1,0)$ 以外の共有点は,

$$(-2a+1,\ -4a(a-1))$$

以上より, 求める共有点は

$(-1,0)$, $(2a+1,\ 4a(a+1))$, $(-2a+1,\ -4a(a-1))$

(2)




上図のように $S_1, S_2, S_3, S_4$ をとる.

$$S_1=\int_{-1}^{-2a+1}\{-x^2+1-2a(x+1)\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{-2a+1}(x+1)(x+2a-1)dx$$

$$=\frac{1}{6}(-2a+1+1)^3=\frac{4}{3}(1-a)^3$$

$$S_3=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx-S_1$$

$$=\frac{4}{3}-\frac{4}{3}(1-a)^3$$

$$S_4=\int_{-1}^{2a+1}\{2a(x+1)-x^2+1\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{2a+1}(x-1)(x-2a-1)dx$$

$$=\frac{1}{6}(2a+1+1)^3=\frac{4}{3}(1+a)^3$$

よって, $S_2=S_4-S_1-2S_3$

$$=\frac{4}{3}(1+a)^3-\frac{4}{3}(1-a)^3-\frac{8}{3}+\frac{4}{3}(1-a)^3$$

$$=8a^2$$

$S_1=S_2$ より

$$\frac{4}{3}(1-a)^3=8a^2$$

$$a^3+3a^2+3a-1=0$$

$$(a+1)^3=2$$

$0<a<1$ より $a+1>0$ だから

$$a+1=\sqrt[3]{2}$$

$$\therefore\ a=\sqrt[3]{2}-1$$

**II**

座標空間内の直線 $l$ と $z$ 軸はねじれの位置にあるとする. $l$ と $z$ 軸の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ.

z軸を,一般の直線 $m$ にしたもの(理系での出題)の解答を以下に示す.

空間内の 2 直線 $\ell$, $m$ はねじれの位置にあるとする. $\ell$ と $m$ の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ.

解答

$\ell$ の方向ベクトルを $\vec{a}$, $m$ の方向ベクトルを $\vec{b}$ とする. $\ell$ と $m$ がねじれの位置であるという条件から $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でない.

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ により生成される平面を $P$ とおく. $\vec{c}$ を $P$ の法線ベクトルとし, $\ell$, $m$ を平面 $P$ に射影したものをそれぞれ $\ell'$, $m'$ とおく. $\ell$ と $\ell'$, $m$ と $m'$ はそれぞれ平行なので $\ell'$ と $m'$ は平行でなく, $\ell'$ と $m'$ はただ 1 点 $S$ において交わる.

このとき, ある直線 $n$ が $\ell$ と $m$ の両方に直交するならそれは $\vec{c}$ に平行である必要があり, $\ell$ と $n$ が交わることから $\ell'$ と $n$ も交わっている. 同様に, $m'$ と $n$ も交わっている必要があるため $n$ は $\ell'$ と $m'$ の交点 $S$ を通る必要がある. 逆に, $S$ を通り $\vec{c}$ に平行な直線 $n$ は $\ell$ と $m$ の両方に垂直に交わる.

以上より, $\ell$ と $m$ の両方に直交する直線はただ 1 つ存在する.

## III

素数を小さい順に並べて得られる数列を

$$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n,\ \cdots$$

とする．

(1) $p_{15}$ の値を求めよ．

(2) $n \geqq 12$ のとき，不等式 $p_n > 3n$ が成り立つことを示せ．

(1) 素数を小さい順に並べると，

$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ p_3 = 5,\ p_4 = 7,\ p_5 = 11,\ p_6 = 13,$

$p_7 = 17,\ p_8 = 19,\ p_9 = 23,\ p_{10} = 29,\ p_{11} = 31,$

$p_{12} = 37,\ p_{13} = 41,\ p_{14} = 43,\ p_{15} = \underline{47}$ //

(2) $p_{12}(=37)$ 以上の整数が素数となるには，その数を6で割った余りが1または5である必要がある．

このことから，$p_n,\ p_n+1,\ p_n+2,\ p_n+3,\ p_n+4,\ p_n+5$ の中に素数は高々2つしかなく，$p_{n+2} \geqq p_n + 6\ (n \geqq 12)$ が従う．…①

$n \geqq 12$ において，$p_n > 3n$ が成立していることを数学的帰納法により示す．

(i) $n = 12$ のとき

$p_{12} = 37 > 3 \times 12$ より成立．

(ii) $n = 13$ のとき

$p_{13} = 41 > 3 \times 13$ より成立．

(iii) $n = 2k$ ($k$は6以上の整数)のとき

$p_{2k} > 3 \cdot 2k$ が成立しているならば，①より $p_{2k+2} \geqq p_{2k} + 6 > 3(2k+2)$ となるので，$n = 2k+2$ でも成立する．

(iv) $n = 2k+1$ のとき

$p_{2k+1} > 3 \cdot (2k+1)$ が成立しているならば，①より $p_{2k+3} \geqq p_{2k+1} + 6 > 3(2k+3)$ となるので，$n = 2k+3$ でも成立する．

∴ 以上(i)〜(iv)より，$n \geqq 12$ において $p_n > 3n$ が成立することが示された ////