
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.25
大阪大学
理系
数学

$\boxed{1}$ 自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x) = 1 - \frac{1}{2}e^{nx} + \cos\frac{x}{3} \quad (x \geqq 0)$$

で定める．ただし，e は自然対数の底である．

(1) 方程式 $f_n(x) = 0$ は，ただ1つの実数解をもつことを示せ．

(2) (1) における実数解を a_n とおくとき，極限値 $\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ．

(3) 極限値 $\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ．

$\boxed{1}$ (1) $\dfrac{df_n}{dx} = -\dfrac{n}{2}e^{nx} - \dfrac{1}{3}\sin\dfrac{x}{3} \leq -\dfrac{n}{2}e^{nx} + \dfrac{1}{3} < 0 \quad \cdots ①$

$\therefore \dfrac{df_n}{dx} < 0$ (恒等的に成立する)

また、$f_n(0) = 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} > 0$

$\lim_{x\to\infty} f_n(x) = -\infty$ そして、f_n の単調減少性よりただ1つの実解をもつ。

(2) $f_n\left(\dfrac{2\log 2}{n}\right) = \cos\dfrac{x}{3} - 1 \leqq 0$ より $a_n \leqq \dfrac{2\log 2}{n}$ であり，

これと(1)より $0 < a_n$ であることから，はさみうちの原理より

$\lim_{n\to\infty} a_n = \underline{0}$ //

(3) a_n は $\dfrac{1}{2}e^{na_n} = 1 + \cos\dfrac{a_n}{3}$

$$na_n = \log\left(2 + 2\cos\frac{a_n}{3}\right)$$ を満たすから，

これと(2)より，$\lim_{n\to\infty} na_n = \underline{2\log 2}$ //

2 α，β を複素数とし，複素数 z に対して

$$f(z)=z^2+\alpha z+\beta$$

とおく．α，β は

$$|f(1)-3| \leqq 1 \quad \text{かつ} \quad |f(i)-1| \leqq 3$$

を満たしながら動く．ただし，i は虚数単位である．

(1) $f(1+i)$ がとりうる値の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ．

(2) $f(1+i)=0$ であるとき，α，β の値を求めよ．

(1) $v=f(1)-3=\alpha+\beta-2$ とおく．$|v|\leqq 1$

$w=f(i)-1=\beta-2+i\alpha$ とおく．$|w|\leqq 3$

これらより，

$$\alpha=\frac{1}{2}(v-w)(1+i)$$

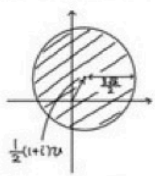
$$\beta=\frac{1}{2}(v+w)+2-\frac{1}{2}(v-w)i$$

なので，

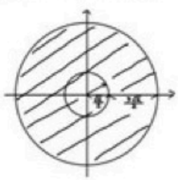
$$f(1+i)=2i+(1+i)\alpha+\beta$$

$$=\frac{1}{2}(1+i)v+\frac{1}{2}(1-i)w+2+2i$$

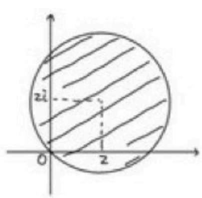
v を固定したときの $\frac{1}{2}(1+i)v+\frac{1}{2}(1-i)w$ のとりうる範囲は以下の通り．



次に v を動かすと $\frac{1}{2}(1+i)v+\frac{1}{2}(1-i)w$ のとりうる範囲は以下の通り．



求める範囲は，これを $2+2i$ だけ平行移動したものだから，以下のような，中心 $2+2i$，半径 $2\sqrt{2}$ の円周とその内部となる．



(2) $f(1+i)=0$ となるのは，

$$\frac{1}{2}(1+i)v=-\frac{1}{2}(1+i),\quad \frac{1}{2}(1-i)w=-\frac{3}{2}(1+i)$$

となるときだから，

$$v=-1,\quad w=-3i$$

である．よって，

$$\begin{cases}\alpha+\beta-2=-1\\ \beta-2+i\alpha=-3i\end{cases}$$

で，これを解いて，

$$\alpha=-2+i,\quad \beta=3-i$$

大問 3

空間内の 2 直線 ℓ, m はねじれの位置にあるとする. ℓ と m の両方に直交する直線がただ 1 つ存在することを示せ.

解答

ℓ の方向ベクトルを $\vec{a}$, m の方向ベクトルを $\vec{b}$ とする. ℓ と m がねじれの位置であるという条件から $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は平行でない.

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ により生成される平面を P とおく. $\vec{c}$ を P の法線ベクトルとし, ℓ, m を平面 P に射影したものをそれぞれ ℓ', m' とおく. ℓ と ℓ', m と m' はそれぞれ平行なので ℓ' と m' は平行でなく, ℓ' と m' はただ 1 点 S において交わる.

このとき, ある直線 n が ℓ と m の両方に直交するならそれは $\vec{c}$ に平行である必要があり, ℓ と n が交わることから ℓ' と n も交わっている. 同様に, m' と n も交わっている必要があるため n は ℓ' と m' の交点 S を通る必要がある. 逆に, S を通り $\vec{c}$ に平行な直線 n は ℓ と m の両方に垂直に交わる.

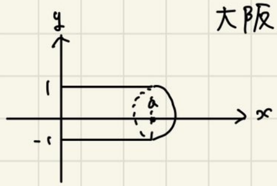
以上より, ℓ と m の両方に直交する直線はただ 1 つ存在する.

4 $a > 1$ とする．xy 平面において，点 $(a,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする．

(1) 円 C の $x \geqq a$ の部分と y 軸および 2 直線 $y = 1,\ y = -1$ で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_1 を求めよ．

(2) 円 C で囲まれた図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V_2 とする．(1) における V_1 について，$V_1 = 2V_2$ となる a の値を求めよ．

大阪大学



$\boxed{4}$ $C : (x-a)^2 + y^2 = 1$

(1) Cの $x \geqq a$ の部分は

$$x - a = \sqrt{1-y^2} \text{ を満たす.}$$

$$x = \sqrt{1-y^2} + a$$

$$V_1 = \pi \int_{-1}^{1} x^2\, dy$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} \left(1 - y^2 + 2a\sqrt{1-y^2} + a^2\right) dy$$

$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-y^2}\, dy$ は 半径1の半円の面積を表すから， $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-y^2}\,dy = \dfrac{\pi}{2}$

よって. $V_1 = \pi \left\{ 2\left[(1+a^2)y - \dfrac{y^3}{3}\right]_0^1 + \pi a \right\}$

$$= \pi\left(2a^2 + \pi a + \frac{4}{3}\right) \cdots (\text{答})$$

(2) 同様に Cの $x \leqq a$ の部分は

$$x - a = -\sqrt{1-y^2} \text{ を満たす}$$

$$x = a - \sqrt{1-y^2}$$

$$V_2 = \pi \int_{-1}^{1} \left\{ \left(a + \sqrt{1-y^2}\right)^2 - \left(a - \sqrt{1-y^2}\right)^2 \right\} dy$$

$$= \pi \int_{-1}^{1} 4a\sqrt{1-y^2}\, dy$$

$$= 2\pi^2 a$$

$$V_1 = 2V_2 \iff \pi\left(2a^2 + \pi a + \frac{4}{3}\right) = 4\pi^2 a$$

$$\iff \pi\left(2a^2 - 3\pi a + \frac{4}{3}\right) = 0$$

$$\therefore\ a = \frac{1}{4}\left(3\pi + \sqrt{9\pi^2 - \frac{32}{3}}\right) \cdots (\text{答}) \quad (\because a > 1)$$

$\boxed{5}$ 自然数 1, 2, 3, $\cdots$, n のうち，n と互いに素であるものの個数を $f(n)$ とする．

(1) 自然数 a, b, c および相異なる素数 p, q, r に対して，等式

$$f(p^a q^b r^c) = p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1)$$

が成り立つことを示せ．

(2) $f(n)$ が n の約数となる 5 以上 100 以下の自然数 n をすべて求めよ．

（配点率 20 %

$\boxed{5}$

(1) $p^a q^b r^c$ と互いに素でなくような整数の個数を考える.

1から $p^a q^b r^c$ のうち, pの倍数であるものは $\dfrac{p^a q^b r^c}{p} = p^{a-1} q^b r^c$ 個

qの倍数であるものは $p^a q^{b-1} r^c$ 個

rの倍数であるものは $p^a q^b r^{c-1}$ 個

pqの倍数であるものは $p^{a-1} q^{b-1} r^c$ 個

prの倍数であるものは $p^{a-1} q^b r^{c-1}$ 個

qrの倍数であるものは $p^a q^{b-1} r^{c-1}$ 個

pqrの倍数であるものは $p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1}$ 個であるので,

包除原理より $p^a q^b r^c$ と互いに素でないものの個数は

$p^{a-1}q^b r^c + p^a q^{b-1} r^c + p^a q^b r^{c-1} - p^{a-1} q^{b-1} r^c - p^{a-1} q^b r^{c-1} - p^a q^{b-1} r^{c-1} + p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1}$ 個

よって $f(p^a q^b r^c) = p^a q^b r^c - p^{a-1} q^b r^c - p^a q^{b-1} r^c - p^a q^b r^{c-1} + p^{a-1} q^{b-1} r^c + p^{a-1} q^b r^{c-1} + p^a q^{b-1} r^{c-1} - p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1}$

$= p^{a-1} q^{b-1} r^{c-1} (p-1)(q-1)(r-1)$ ■

(2) (1)と同様にして $f(p^a) = p^{a-1}(p-1)$, $f(p^a q^b) = p^{a-1} q^{b-1} (p-1)(q-1)$ が成り立つことがわかる.

また, $2\times3\times5\times7=210>100$ より 5以上100以下の自然数は異なる素因数を高々3個しか持たない.

(i) $n=p^a$ と表されるとき. $f(n)$が n を割り切るので $p-1$はpを割り切るが.

$p-1$ とpは互いに素であるので, $p-1=1$. 逆に2のとき $f(p^a)=p^{a-1}$となり条件を満たす.

よって $n=2^p$であり. $5\leqq n\leqq100$ より $n=8, 16, 32, 64$

(ii) $n=p^a q^b$ $(p<q)$ と表されるとき. p, qは相異なる素数であるので qは奇素数。

よって $f(p^a q^b) = p^{a-1} q^{b-1} (p-1)(q-1)$ は偶数であり, $f(p^a q^b)$ は$p^a q^b$を割り切るので $p=2$が必要。

このとき $f(p^a q^b) = 2^{a-1} q^{b-1} (q-1)$ であり, qと$q-1$が互いに素より $2^{a-1}(q-1)$ は 2^aを割り切る. つまり $q-1$は2を割り切る.

よって $q=3$であり, このとき $f(p^a q^b) = 2^a 3^{b-1}$ となり条件を満たす。

$5\leqq n\leqq100$ より $n=6, 12, 24, 48, 96, 18, 36, 72, 54$.

(iii) $n=p^a q^b r^c$ $(p<q<r)$ と表されるとき. q, rは奇素数なので $q-1, r-1$は偶数である

$f(p^a q^b r^c)$ が $p^a q^b r^c$ を割り切るので $p=2$であるが,

このとき $f(p^a q^b r^c) = 2^{a+1} \dfrac{q-1}{2} \dfrac{r-1}{2}$ より $f(2^a q^b r^c)$ は $2^a q^b r^c$ を割り切らない。

以上より $n=6, 8, 12, 16, 18, 24, 32, 36, 48, 54, 64, 72, 96$