
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.25
九州大学
文系
数学

〔1〕　(配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{11}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

2 つの放物線

$$C_1 : y = 2x^2, \quad C_2 : y = 2x^2 - 8x + 16$$

の両方に接する直線を ℓ とする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線 ℓ の方程式を求めよ。

(2) 2 つの放物線 C_1，C_2 と直線 ℓ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(1) まず，C_1 の $x=t$ における接線は，$C_1 : y' = 4x$ より

$y = 4t(x-t) + 2t^2 = 4tx - 2t^2$ とおける.

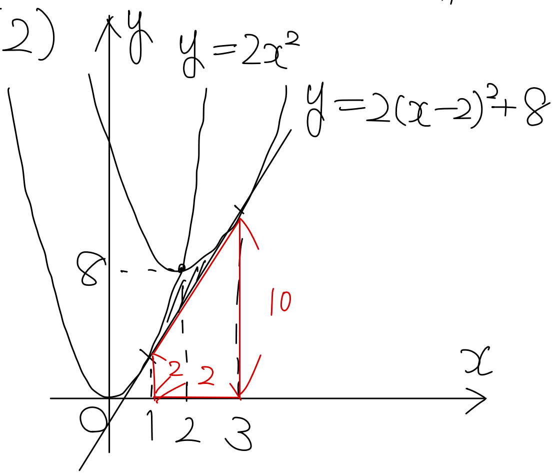
これと C_2 が接するから，

$4tx - 2t^2 = 2x^2 - 8x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 2(t+2)x + (t^2+8) = 0$ が

重解を持つので，$(t+2)^2 - (t^2+8) = 0 \Leftrightarrow t = 1$

$\therefore \ell : y = 4x - 2$ //

(2)



これらを図示すると，左のようになる.（C_2 と ℓ の接点は $(3, 10)$）

以上より，求める面積は，

$$\int_1^2 2x^2\,dx + \int_2^3 (2x^2 - 8x + 16)\,dx - \frac{1}{2}\cdot(2+10)\cdot 2$$

$$= \frac{14}{3} + \frac{26}{3} - 12$$

$$= \frac{4}{3}$$ //

〔2〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{12}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

座標平面上の原点 O(0, 0)，点 A(2, 1) を考える。点 B は第 1 象限にあり，$|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{10}$，$\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{AB}$ をみたすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 B の座標を求めよ。

(2) s，t を正の実数とし，$\overrightarrow{OC} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ をみたす点 C を考える。三角形 OAC と三角形 OBC の面積が等しく，$|\overrightarrow{OC}| = 4$ が成り立つとき，s，t の値を求めよ。

(1) $B(a, b)$ とおく. $(a>0, b>0, a^2+b^2=10)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より, $b=5-2a$ で, これより $a<\frac{5}{2}$

$a^2+(5-2a)^2=10 \Leftrightarrow a=1, 3$ と, $a<\frac{5}{2}$ より $a=1, b=3$

$\therefore B(1, 3)$ //

(2) $\overrightarrow{OC} = s\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2s+t\\s+3t\end{pmatrix}$ である.

$|\triangle OAC| = \frac{1}{2}|2(s+3t)-(2s+t)| = \frac{5}{2}t$

$|\triangle OBC| = \frac{1}{2}|(s+3t)-3(2s+t)| = \frac{5}{2}s$ より,

$|\triangle OAC| = |\triangle OBC| \Leftrightarrow s=t$ である.

そして, $|\overrightarrow{OC}| = \sqrt{(3s)^2+(4s)^2} = 5s = 4$ より, $s=\frac{4}{5}, t=\frac{4}{5}$

$\therefore (s, t) = (\frac{4}{5}, \frac{4}{5})$ //

【３】（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{17}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 a，b が $a<b$ をみたすとき，$\dfrac{b!}{a!} \geqq b$ が成り立つことを示せ。

(2) $2\cdot a! = b!$ をみたす自然数の組 (a,b) をすべて求めよ。

(3) $a! + b! = 2\cdot c!$ をみたす自然数の組 (a,b,c) をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ (1) $a<b$ より，$a \leqq b-1$ だから，

$$\frac{b!}{a!} \geqq \frac{b!}{(b-1)!} = b \quad \blacksquare$$

(2) $2\cdot a! = b! \iff 2 = \dfrac{b!}{a!}$

条件より明らかに $a<b$ であって，

(1)より，$\dfrac{b!}{a!} = 2 \geqq b \quad \therefore b=1,2$

$b=1$ のとき　$a! = \frac{1}{2}$ より不適

$b=2$ のとき　$a! = 1$　$a=1$　　よって $(a,b) = (1,2)$ …（答）

(3) $a=b=c$ のとき与式は明らかに成立

以下，$a<b$ として考える

$a!+b! = a!\{1+b(b-1)\cdots(b-a+1)\}$　（$a \leqq b-2$ のときを例として示した）

$$(\text{与式}) \iff \frac{1+b(b-1)\cdots(b-a+1)}{2} = \frac{c!}{a!} \quad \cdots (\heartsuit)$$

(i) b が偶数のとき，

$1+b(b-1)\cdots(b-a+1)$ は奇数だから $(\heartsuit)$ の左辺は整数ではない

よって，少なくとも $c<a$ であるが，今 $a<b$ であるため，

$a!+b! > 2a!$ だから これを満たすような組はない

(ii) b が奇数のとき

(ア) $a \leqq b-2$ のとき

(i)と同様の議論により満たす組はない

(イ) $a=b-1$ のとき

$(b-1)!+b! = (b+1)\cdot(b-1)!$ より

$$(\text{与式}) \iff \frac{b+1}{2} = \frac{c!}{(b-1)!} \quad \cdots (\ast)$$

$(\ast)$ の左辺は整数（$b+1$ は偶数）だから　$c \geqq b-1$ が必要

$c > b-1$ のとき.

(1)より $\dfrac{c!}{(b-1)!} \geqq c > b-1$ であるため.

$\dfrac{b+1}{2} > b-1$ が必要で. これを満たすbは $b=1, 2$

bは奇数であったから $b=1$ であるが. このとき $a<b$ を満たすaは存在せず不適

$c = b-1$ のとき

$(b+1)(b-1)! = 2(b-1)! \iff b=1$ だが同様に不適

以上より. 求める組は $(a,b,c) = (k,k,k)$ (k:自然数) …(答) のみ

〔4〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{18}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

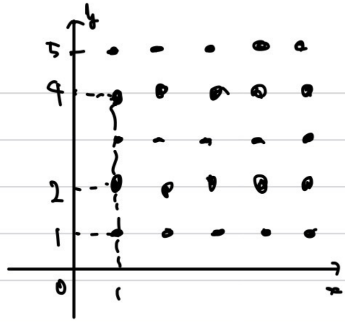
n を 3 以上の整数とする。座標平面上の点のうち， x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数であるものを考える。これら n^2 個の点のうち 3 点以上を通る直線の個数を $L(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $L(3)$ を求めよ。

(2) $L(4)$ を求めよ。

(3) $L(5)$ を求めよ。

九大 $\boxed{4}$



(1) 数え上げていくと、

$L(3)=3+1+2+1+1=8$

(2) 1以上3以下の領域の点のうち

3点を通る直線の個数は $L(3)$

2点を通るものは、3個

1点を通るものは、7個

0点のものは、2個

よって、$L(4)=14$

(3) (2)と同様に、1以上4以下の領域の点のうち

3点を通る直線の個数は $L(4)$

2点を通るものは、13個

1点を通るものは、3個

0点のものは、2個

$L(5)=32$