
ゴウカライズ
解答速報
2024.2.25
九州大学
理系
数学

〔1〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{15}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

a を実数とし，座標空間内の 3 点 $P(-1,1,-1)$，$Q(1,1,1)$，$R(a,a^2,a^3)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $a \neq -1$，$a \neq 1$ のとき，3 点 P，Q，R は一直線上にないことを示せ。

(2) a が $-1 < a < 1$ の範囲を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値を求めよ。

九大

$\boxed{1}$ (1) $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{PR} = \begin{pmatrix} a+1 \\ a^2-1 \\ a^3+1 \end{pmatrix}$

一直線上にあるとすると，

$a^2-1=0$

$a \neq \pm 1$ より，これは矛盾

よって P, Q, R は同一直線上でない。

(2) $S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{PQ}|^2|\overrightarrow{PR}|^2 - (\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR})^2}$

$= \frac{1}{2}\sqrt{\underbrace{8\{(a+1)^2+(a^2-1)^2+(a^3+1)^2\} - 4\{(a+1)+(a^3+1)\}^2}_{(*)}}$

$(*) = f(a)$ とおく。

$f(a) = 8(a^6+a^4+2a^3-a^2+2a+3) - 4(a^3+a+2)^2$

$= 4a^6 - 12a^2 + 8$

$f'(a) = 24a^5 - 24a$

$= 24(a^4-1)a$

$-1<a<1$ では，$a=0$ で max f

このときに，S は最大値 $\frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ をとる。

〔2〕（配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{16}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

整式

$$f(z)=z^6+z^4+z^2+1$$

について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(z)=0$ をみたすすべての複素数 z に対して，$|z|=1$ が成り立つことを示せ。

(2) 次の条件をみたす複素数 w をすべて求めよ。

条件 ： $f(z)=0$ をみたすすべての複素数 z に対して $f(wz)=0$ が成り立つ。

$\boxed{2}$ (1) $z^2=t$ として，$|t|=1$ を示せばよい …(♡)

$f(z)=t^3+t^2+t+1$

$=(t+1)(t^2+1)$

$t=-1,\ \pm i$

(♡)が成り立つから題意は示せた

(2) $|z|=1$ であるから $|wz|=1 \iff |w|=1$

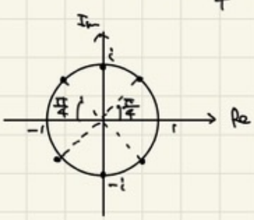
よって，$w=\cos\theta+i\sin\theta$ とすると，wz は z を原点中心反時計回りに

θ 回転させた点である …(♡)

ここで，(1)の過程より，偏角の範囲を 0 から 2π に制限すると

$z^2=-1,\ \pm i$

$\iff z=\pm i,\ \cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4},\ \cos\frac{2}{4}\pi+i\sin\frac{3}{4}\pi,\ \cos\frac{5}{4}\pi+i\sin\frac{5}{4}\pi,\ \cos\frac{7}{4}\pi+i\sin\frac{7}{4}\pi,$



z を複素平面上に図示すると左図

(♡)を考慮すると，左図の6つの点の全てが回転を施すことにより

また点と重なるような回転を考えればよく，そのような回転は

$n\pi$ (n：整数) の回転に限られる

よって，$w=\cos n\pi+i\sin n\pi$ (n：整数)

$\therefore\ w=\pm 1$ …(答)

〔3〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{17}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 a，b が $a < b$ をみたすとき，$\dfrac{b!}{a!} \geqq b$ が成り立つことを示せ。

(2) $2 \cdot a! = b!$ をみたす自然数の組 (a, b) をすべて求めよ。

(3) $a! + b! = 2 \cdot c!$ をみたす自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ (1) $a<b$ より，$a \leqq b-1$ だから，

$$\frac{b!}{a!} \geqq \frac{b!}{(b-1)!} = b$$

(2) $2 \cdot a! = b! \iff 2 = \dfrac{b!}{a!}$

条件より明らかに $a<b$ であって，

(1)より，$\dfrac{b!}{a!} = 2 \geqq b$ $\quad \therefore b = 1, 2$

$b=1$ のとき $a! = \frac{1}{2}$ より不適

$b=2$ のとき $a! = 1$ $\quad a = 1$ $\qquad$ よって $(a, b) = (1, 2)$ …(答)

(3) $a=b=c$ のとき与式は明らかに成立

以下，$a<b$ として考える

$a! + b! = a!\{1 + b(b-1)\cdots(b-a+1)\}$ $\quad$ ($a \leqq b-2$ のときを例として示した)

(与式) $\iff \dfrac{1+b(b-1)\cdots(b-a+1)}{2} = \dfrac{c!}{a!}$ …(♡)

(i) b が偶数のとき，

$1+b(b-1)\cdots(b-a+1)$ は奇数だから(♡)の左辺は整数ではない

よって，少なくとも $c<a$ であるが，今 $a<b$ であるため，

$a!+b! > 2a!$ だから これを満たすような組はない

(ii) b が奇数のとき

(ア) $a \leqq b-2$ のとき

(i)と同様の議論により満たす組はない

(イ) $a = b-1$ のとき

$(b-1)! + b! = (b+1) \cdot (b-1)!$ より

(与式) $\iff \dfrac{b+1}{2} = \dfrac{c!}{(b-1)!}$ …(★)

(★)の左辺は整数($b+1$ は偶数)だから $c \geqq b-1$ が必要

$c > b-1$ のとき.

(1)より $\dfrac{c!}{(b-1)!} \geqq c > b-1$ であるため.

$\dfrac{b+1}{2} > b-1$ が必要で. これを満たす b は $b=1, 2$

b は奇数であったから $b=1$ であるが. このとき $a<b$ を満たす a は存在せず不適

$c = b-1$ のとき

$(b+1)(b-1)! = 2(b-1)! \iff b=1$ だが同様に不適

以上より. 求める組は $(a, b, c) = (k, k, k)$ (k:自然数) …(答) のみ

〔 4 〕　(配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{18}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

n を 3 以上の整数とする。座標平面上の点のうち，x 座標と y 座標がともに 1 以上 n 以下の整数であるものを考える。これら n^2 個の点のうち 3 点以上を通る直線の個数を $L(n)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $L(3)$ を求めよ。

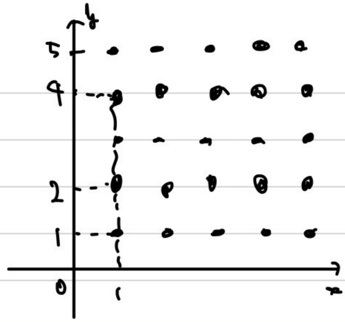
(2) $L(4)$ を求めよ。

(3) $L(5)$ を求めよ。

九大 $\boxed{4}$

(1) 数え上げていくと、

$L(3)=3+1+2+1+1=8$



(2) 1以上 3以下の領域の点のうち

3点を通る直線の個数は $L(3)$

2点を通るものは、3個

1点を通るものは、7個

0点のものは、2個

よって、$L(4)=14$

(3) (2)と同様に、1以上 4以下の領域の点のうち

3点を通る直線の個数は $L(4)$

2点を通るものは、13個

1点を通るものは、3個

0点のものは、2個

$L(5)=32$

〔 5 〕 （配点 50 点）

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{19}$ の定められた場所に記入しなさい。

［問題］

自然数 m，n に対して

$$I(m,n) = \int_1^e x^m e^x (\log x)^n \, dx$$

とする。以下の問いに答えよ。

(1) $I(m+1, n+1)$ を $I(m, n+1)$，$I(m,n)$，m，n を用いて表せ。

(2) すべての自然数 m に対して，$\lim_{n\to\infty} I(m,n) = 0$ が成り立つことを示せ

$I(1,n) = \int_1^e x e^x ((\log x)^n dx$

$= [e^x x ((\log x)^n]_1^e - \int_1^e e^x ((\cdots$

$e^e \cdot e^{m+1}$

(1) $I(m+1, n+1) = \int_1^e x^{m+1} e^x (\log x)^{n+1} dx$

$= \left[x^{m+1} e^x (\log x)^{n+1} \right]_1^e - \int_1^e e^x \left((m+1) x^m (\log x)^{n+1} + (n+1) x^m (\log x)^n \right) dx$

$= e^{m+1} e^e - (m+1) I(m, n+1) - (n+1) I(m,n)$

(2) $y = \log x$ のグラフは上に凸であるので，点 $(e, 1)$ での接線を考えて

$x > 0$ で $\log x < \frac{1}{e}(x - e) + 1 = \frac{1}{e} x$

よって $0 \leq x^m e^x (\log x)^n \leq e^m e^e \left(\frac{1}{e} x \right)^n$

$0 \leq I(m,n) \leq \int_1^e e^{e+m-n} x^n \, dx = \left[\frac{1}{n+1} e^{e+m-n} x^{n+1} \right]_1^e = \frac{1}{n+1} (e^{e+m+1} - e^{e+m-n})$

ここで $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} (e^{e+m+1} - e^{e+m-n}) = 0$ であるので

はさみうちの原理より $\lim_{n\to\infty} I(m,n) = 0$